

Σύγχρονη Φυσική I, Μέρος Δεύτερο

Περιεχόμενα

K0. Εισαγωγή

Π1: Παράρτημα Οπτικής

K1: Σωματιδιακή Φύση των ΗΜ Κυμάτων

Π2: Παράρτημα (Η Δυναμική Ενέργεια σε Σταθερό Ηλεκτρικό Πεδίο)

K2: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

K3: Κυματική Φύση της Ύλης

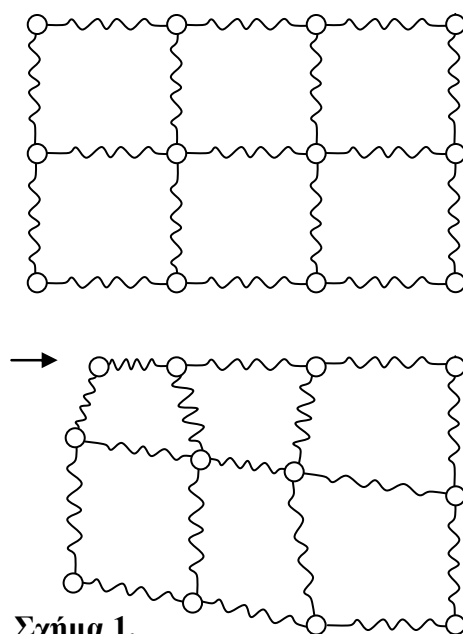
K4: Η Εξίσωση Schrödinger & ο Κβαντικός Μικρόκοσμος

K0. Εισαγωγή

1. Η Κλασική Φυσική στο Γύρισμα του 19^{ου} προς 20^ο Αιώνα

Στο τέλος του 19^{ου} αιώνα, αυτό που ονομάζουμε σήμερα Κλασική Φυσική είχε φτάσει στο απόγειό της. Το οικοδόμημα αυτό, βασισμένο στους τρεις πυλώνες του - Κλασική Μηχανική, Θεωρία Πεδίων και Κλασική Στατιστική Μηχανική – εξηγούσε το σύνολο σχεδόν των φαινομένων του μακρόκοσμου. Η Κλασική Μηχανική έχει ως βάση το νόμο του Νεύτωνα ($\vec{F} = m\vec{a}$ ή σωστότερα $\vec{F} = d\vec{p}/dt$), η Θεωρία Πεδίων αφορούσε τότε το πεδίο βαρύτητας και το ηλεκτρομαγνητικό (H/M) πεδίο (Εξισώσεις Maxwell) και η Κλασική Στατιστική Φυσική συνδέει το μικρόκοσμο με το μακρόκοσμο, εισάγοντας τις μη-αντιστρεπτές διαδικασίες και τον ανεξάρτητο θεμελιώδη νόμο της αύξησης της Εντροπίας. Η Κλασική Μηχανική έχει ως

σκοπό την περιγραφή των κινήσεων των σωμάτων κάτω από την επίδραση δυνάμεων. Ασχολείται επίσης και με τη σχετική κίνηση των δομικών μονάδων ενός συνεχούς μέσου κάτω από την επίδραση αμοιβαίων δυνάμεων, με εφαρμογή στη μηχανική των ρευστών και την κυματική. Ειδικά για την τελευταία, η λεγόμενη κυματική εξίσωση που περιγράφει τα *μηχανικά* κύματα, εξάγεται επίσης από την εξίσωση του Νεύτωνα. Συνεπώς, όπως λεγόταν τότε, «...σε τελευταία ανάλυση όλα τα κύματα είναι μηχανικές ταλαντώσεις κάποιου υλικού μέσου...» (Σχ. 1) και, επακόλουθα, η διάδοση των κυμάτων απαιτεί την ύπαρξη κάποιου μέσου διάδοσης. Το πρόβλημα που προέκυψε από αυτή τη θεώρηση αφορούσε το φως μια και, π.χ., το φως που προέρχεται από τα μακρινά άστρα φαινόταν να διαδίδεται στο κενό. Για τη λύση του προ-



Σχήμα 1.

βλήματος αυτού εντός του πλαισίου της Νευτώνειας Μηχανικής προτάθηκε ότι το φως διαδίδεται σε κάποιο υλικό μέσο που ονομάστηκε αιθέρας και «γεμίζει» το σύμπαν. Πειραματικές μετρήσεις όμως έδειξαν ότι αιθέρας δεν υπάρχει. Η τελική λύση στο τότε παράδοξο δόθηκε από τον Maxwell και τις εξισώσεις του που προβλέπουν ότι το φως είναι H/M κύμα και μπορεί να διαδίδεται και στο κενό, απουσία δηλαδή κάποιου υλικού μέσου. Συνεπώς οι εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού είναι ανεξάρτητες του Νόμου του Νεύτωνα. Οι συνέπειες όμως αυτής της ανεξαρτησίας είναι σημαντικές. Συγκεκριμένα, οδήγησε τους φυσικούς ώστε να θεωρήσουν **δύο ξεχωριστές και αμοιβαία αποκλειόμενες φυσικές οντότητες:**

(i) Τα Σωματίδια, που χαρακτηρίζονται από καλά καθορισμένες τροχιές και έχουν ενέργεια και ορμή εντοπισμένες στο χώρο που καταλαμβάνουν. Επίσης, τα φυσικά μεγέθη που τα χαρακτηρίζουν, όπως η ενέργεια, η ορμή, η στροφορμή κλπ, μπορούν να πάρουν όλες τις δυνατές τιμές εντός επιτρεπόμενων διαστημάτων (συνεχές πεδίο τιμών).

και

(ii) Τα Κύματα (H/M), τη διάδοση δηλαδή διαταραχών, όπου δεν υφίστανται καλά καθορισμένες τροχιές και η ενέργεια και η ορμή που μεταφέρεται από αυτά δεν είναι εντοπισμένες στο χώρο. Το πεδίο τιμών των καθα-

ρά κυματικών μεγεθών (συχνότητα, μήκος κύματος) όπως και της ενέργειας και της ορμής είναι και εδώ συνεχές... εκτός από μερικές περιπτώσεις που σχετίζονται με το καθαρά κυματικό φαινόμενο της συμβολής, όπου και συναντούμε *διάκριτες* επιτρεπτές τιμές τους (π.χ. στάσιμα κύματα-Κοιτάξτε Παράρτημα Κυματικών Φαινομένων στο τέλος αυτής της ενότητας).

2. Κλασική Στατιστική Μηχανική

Όπως είπαμε, η Κλασική Στατιστική Μηχανική συνδέει το μικρόκοσμο με το μακρόκοσμο. Κεντρικό αποτέλεσμα της Κλασικής Στατιστικής Μηχανικής αποτελεί ο ανεξάρτητος θεμελιώδης νόμος της φύσης για την αύξηση της Εντροπίας, ο οποίος δε συνάγεται από τις εξισώσεις της μικροσκοπικής κίνησης (που είναι αναλλοίωτες στην αντιστροφή του χρόνου) διότι οι μακροσκοπικές μεταβολές είναι μονής κατεύθυνσης. Ο αριθμός των σωματιδίων ενός μακροσκοπικού συστήματος είναι τόσο μεγάλος ($\sim 10^{23}$) ώστε η λύση των εξισώσεων κίνησης να είναι πρακτικά αδύνατη. Αλλά για τη γνώση των μακροσκοπικών μεγεθών, δεν είναι ούτε καν αναγκαία, π.χ. για τον υπολογισμό της πίεσης ενός αερίου, αρκεί η γνώση του αριθμού των σωματιδίων και της κατανομής ταχυτήτων τους.

Μεγιστοποιώντας την Εντροπία βρίσκουμε ότι εάν είναι N ο συνολικός αριθμός σωματιδίων ενός συστήματος, το ποσοστό σωματιδίων αυτών με Μηχανική Ενέργεια στο διάστημα μεταξύ E και $E + dE$ σε απόλυτη θερμοκρασία T (ή, ισοδύναμα, η πιθανότητα P να έχει ένα σωματίδιο μηχανική ενέργεια στο διάστημα E και $E + dE$ στη θερμοκρασία αυτή) γράφεται ως (Boltzmann),

$$P = \frac{dN}{N} = A e^{-E/kT} dE \quad (1)$$

Πως θα βρούμε τη σταθερά A ; Θα τη επιλέξουμε έτσι ώστε η συνολική πιθανότητα (να έχει το σωματίδιο οποιαδήποτε ενέργεια) να είναι μονάδα. Υποθέτοντας συνεχείς τιμές για την ενέργεια E , θα πρέπει λοιπόν να ισχύει,

$$P_{tot} = A \int e^{-E/kT} dE = 1 \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{\int e^{-E/kT} dE} \quad (2)$$

Ερώτηση: Τι θα κάναμε εάν οι επιτρεπτές τιμές της ενέργειας των σωματιδίων ήταν *διάκριτες*;

Κάποιες από τις έννοιες αυτές θα τις χρησιμοποιήσουμε στη μελέτη του φάσματος του μέλανος σώματος.

3. Επίλογος

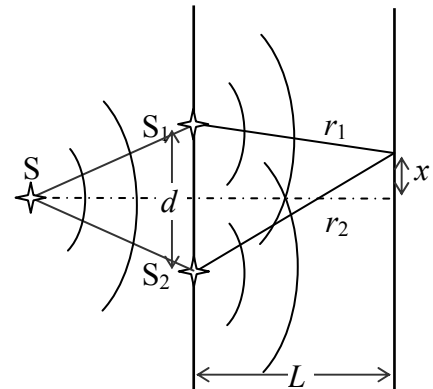
Συμπεριλαμβάνοντας λοιπόν και την Κλασική Στατιστική Μηχανική καθώς και την Θεωρία της Σχετικότητας, στα τέλη του 19^{ου} αιώνα η επιτυχία της Κλασικής Φυσικής είναι πλήρης μια και εξηγεί όλα τα μέχρι τότε πειραματικά δεδομένα. Τα δεδομένα αυτά όμως αφορούν μόνο το μακρόκοσμο και όχι το μικρόκοσμο. Από τη στιγμή που το πείραμα θα ασχοληθεί με το μικρόκοσμο εμφανίζονται αδικαιολόγητες και μη αναμενόμενες... «παραφωνίες». Οι τελευταίες οδήγησαν στην αναθεώρηση των απόψεών μας για τη λειτουργία του μικρόκοσμου και στην ανακάλυψη μιας πληρέστερης θεωρίας γι' αυτόν, την Κβαντική Μηχανική. Οι κυριότερες «παραφωνίες» αφορούν την ακτινοβολία μέλανος (μαύρου) σώματος, το φωτοηλεκτρικό

φαινόμενο, το φαινόμενο Compton, το πείραμα Davisson-Germer και τα φασματοσκοπικά δεδομένα των στοιχείων (αερίων). Παρακάτω θα ασχοληθούμε με μερικά από αυτά τα φαινόμενα. Είναι όμως χρήσιμο να συνοψίσουμε από τώρα το βασικό συμπέρασμα που προέκυψε από την επιτυχή θεωρητική ερμηνεία τους και οδήγησε στη γένεση των Κβαντομηχανικής, ότι δηλαδή **στο μικρόκοσμο τα σωματίδια μπορούν να εμφανίσουν κυματική συμπεριφορά και, αντίστοιχα, τα κύματα σωματιδιακή**. Προφανώς, αυτό έρχεται σε πλήρη αντίθεση με τον παραπάνω κλασικό διαχωρισμό σε σωματίδια και κύματα.

Π1. Παράρτημα Κυματικών Φαινομένων

1. Το Συμβολόμετρο του Young

Η διάταξη του συμβολομέτρου Young φαίνεται στο Σχ. 1. Θεωρήστε την πηγή S που εκπέμπει σφαιρικά φωτεινά κύματα μίας μόνο συχνότητας, είναι δηλαδή μια *μονοχρωματική* πηγή. Το κύμα διαδίδεται προς μία οθόνη που έχει δύο μικρές οπές σε ίσες αποστάσεις από τον άξονα του συστήματος. Συνεπώς, οι οπές βρίσκονται επί του ιδίου κυματομετώπου. Τα σημεία του κυματομετώπου αυτού στις περιοχές των οπών λειτουργούν ως δευτερογενείς πηγές, S_1 και S_2 σφαιρικών κυμάτων (αρχή του Huygens). Λόγω της ίσης απόστασης των S_1 και S_2 από την S λοιπόν, οι δύο αυτές φωτεινές πηγές είναι



Σχήμα 1.

συμφασικές (έχουν διαφορά φάσης μηδέν ή ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π). Θεωρούμε επιπλέον ότι είναι και *σύμφωνες*. (Οι δύο όροι δεν είναι ταυτόσημοι. Σύμφωνες ονομάζονται οι πηγές των οποίων η διαφορά φάσης $\Delta\phi$ δεν αλλάζει με το χρόνο, αλλά δεν είναι αναγκαστικά μηδενική ή ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π). Σε απόσταση L από την οθόνη με τις οπές υπάρχει μια ακόμη οθόνη στην οποία φτάνουν τα δύο κύματα. Η απόσταση L θεωρείται πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση των δύο πηγών d . Ως επακόλουθο, τα κύματα που φτάνουν στην τελική οθόνη είναι με πολύ καλή προσέγγιση επίπεδα. Σε κάποια θέση x της δεύτερης οθόνης τα δύο κύματα συμβάλλουν και το συνολικό φωτεινό κύμα βρίσκεται από την αρχή της υπέρθεσης (ή επαλληλίας), θα περιγράφεται δηλαδή από το αλγεβρικό άθροισμα των δύο επιμέρους διαταραχών (τα ηλεκτρικά πεδία των αντίστοιχων ηλεκτρομαγνητικών (H/M) κυμάτων),

$$E_{\text{tot}}(t) = E_1(t) + E_2(t) = E_{\text{max},1} \cdot \cos(\omega t - k r_1) + E_{\text{max},2} \cdot \cos(\omega t - k r_2) \quad (1)$$

με $k=2\pi/\lambda$. Οι αποστάσεις r_1 και r_2 που διανύουν τα κύματα είναι προφανώς, εν γένει, διαφορετικές. Αυτό σημαίνει ότι τα δύο κύματα στο σημείο αυτό δε θα είναι πλέον συμφασικά αλλά θα έχουν μία διαφορά φάσης,

$$\Delta\phi = k r_2 - k r_1 = k(r_2 - r_1) = k \Delta r. \quad (2)$$

Η μέση ένταση του συνολικού κύματος (που είναι αυτό που βλέπει το μάτι και καταγράφει ένας φωτοανιχνευτής) γράφεται ως

$$I_{\text{tot}} \propto \langle E_{\text{tot}}^2 \rangle = \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 \rangle \quad (3)$$

όπου $\langle \dots \rangle$ υποδηλώνει μέση χρονική τιμή. Ο υπολογισμός της συνολικής μέσης έντασης δίνει τελικά,

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 + 2[I_1 \cdot I_2]^{1/2} \cos(\Delta\phi) \quad (4)$$

όπου I_1 ($\propto \langle E_1^2 \rangle$) και I_2 ($\propto \langle E_2^2 \rangle$) οι μέσες εντάσεις του κάθε ενός κύματος ξεχωριστά (που θα πάρουμε εάν κλείσουμε κάποια από τις δύο οπές). Προφανώς, οι I_{tot} , I_1 , I_2 και $\Delta\phi$ δεν μεταβάλλονται με το χρόνο. Για διαφορετικές θέσεις x , η I_{tot} μεταβάλλεται μεταξύ μιας μέγιστης τιμής (*φωτεινοί κροσσοί συμβολής*)

$$I_{\text{max}} = I_1 + I_2 + 2[I_1 \cdot I_2]^{1/2} \text{ για } \Delta\phi = 2n\pi, n=0,1,2,\dots \quad (5)$$

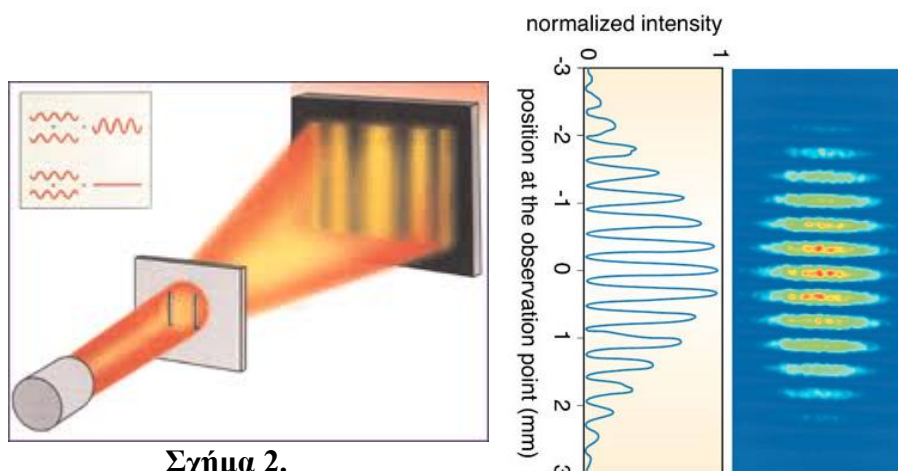
και μιας ελάχιστης τιμής (*σκοτεινοί κροσσοί*)

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2[I_1 \cdot I_2]^{1/2} \text{ για } \Delta\phi = (2n+1)\pi, n=0,1,2,\dots \quad (6)$$

Προσέξτε ότι κατά την ενισχυτική συμβολή (σχέση (5)) η συνολική ένταση είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο εντάσεων ενώ κατά την καταστροφική (ή καταστρεπτική) συμβολή (σχέση (6)) είναι μικρότερη από αυτό. Έχουμε δηλαδή μια ανακατανομή της έντασης σε σχέση με το απλό άθροισμα $I_1 + I_2$. Η συμβολή λοιπόν είναι ένα κυματικό φαινόμενο μέσω του οποίου οι μεταβολές φάσης μετατρέπονται σε μεταβολές φωτεινής έντασης. Η διαφορά δρόμου Δr υπολογίζεται γεωμετρικά. Για την παραδοχή που έχουμε κάνει ($L \gg d$) έχουμε ότι,

$$\Delta r \approx \frac{d \cdot x}{L}. \quad (7)$$

Η εναλλαγή φωτεινών και σκοτεινών κροσσών φαίνεται στο παράδειγμα του Σχ. 2. Ερωτήσεις: Τι θα συνέβαινε εάν οι πηγές δεν ήταν σύμφωνες και η $\Delta\phi$ μεταβαλλόταν με το χρόνο; Τι θα συνέβαινε εάν πραγματοποιούσαμε το πείραμα με μικρές μεταλλικές σφαίρες;



Σχήμα 2.

2. Στάσιμα Κύματα

Τα στάσιμα κύματα είναι μία άλλη περίπτωση επαλληλίας κυμάτων. Θεωρήστε δύο επίπεδα κύματα ίσου πλάτους που διαδίδονται κατά την ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετες κατευθύνσεις (+z και -z αντίστοιχα). Σε κάποιο σημείο z οι απομακρύνσεις τους γράφονται

$$y_1 = y_{\max} \cdot \sin(\omega t - kz) \quad (8\alpha)$$

και

$$y_2 = y_{\max} \cdot \sin(\omega t + kz). \quad (8\beta)$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας ($y_{\text{tot}} = y_1 + y_2$) μετά από κάποιες τριγωνομετρικές πράξεις η συνολική απομάκρυνση γράφεται ως

$$y_{\text{tot}}(z, t) = 2y_{\max} \cdot \cos(kz) \cdot \sin(\omega t). \quad (9)$$

Η σχέση (9) μας λέει ότι το σημείο στη θέση z ταλαντώνεται στο χρόνο με κυκλική συχνότητα ω , όπως και τα επιμέρους κύματα, αλλά τόσο το πλάτος όσο και η φάση του μεταβάλλονται με τη θέση αυτή. Τα σημεία για τα οποία ισχύει $\cos(kz) = 0$ δεν ταλαντώνονται καθόλου και ονομάζονται δεσμοί ή κόμβοι. Αντίθετα τα σημεία για τα οποία ισχύει $|\cos(kz)| = 1$ ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος $2y_{\max}$ και ονομάζονται κοιλίες. Όλα τα υπόλοιπα σημεία έχουν πλάτη μεταξύ 0 και $2y_{\max}$. Διαδοχικοί δεσμοί ή διαδοχικές κοιλίες απέχουν από-

σταση $\Delta z = \lambda/2$ (ενώ διαδοχικός δεσμός από κοιλία $\lambda/4$) – Σχ. 3. Τέλος, σημεία μεταξύ δύο δεσμών πάλλονται συμφασικά ενώ είναι εκτός φάσης κατά π με τα σημεία εκατέρωθεν των δεσμών αυτών.

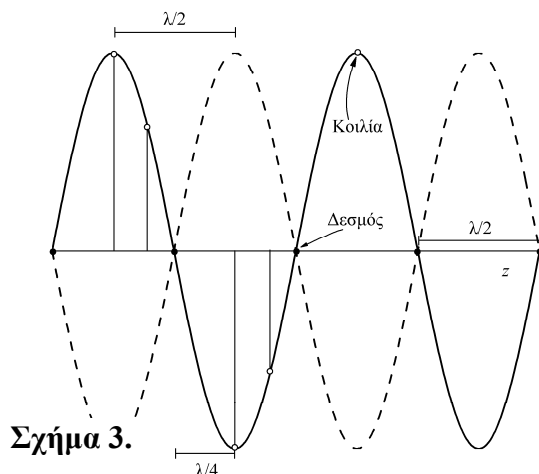
Θεωρήστε τώρα μία χορδή (π.χ. μιας κιθάρας) τε-
ντωμένη μεταξύ δύο ακλόνητων άκρων. Έστω ότι το μή-
κος της χορδής είναι l . Εάν χτυπήσουμε τη χορδή αυτή θα
αρχίσει να πάλλεται και θα δημιουργηθεί ένα στάσιμο κύ-
μα από τα *πολλά* κύματα που θα διαδίδονται κατά μήκος
της κατά τις δύο κατευθύνσεις και θα ανακλώνται στα δύο
ακλόνητα άκρα. Τα δύο τελευταία προφανώς δεν θα πάλ-
λονται καθόλου, θα είναι δηλαδή δεσμοί. Το σημαντικό
στοιχείο εδώ είναι ότι η χορδή δεν μπορεί να πάλλεται σε
οποιοδήποτε μήκος κύματος. Πάλλεται μόνον σε εκείνα τα μήκη κύματος για τα οποία ισχύει

$$l = m \frac{\lambda_m}{2}, m=1,2,\dots \quad (10)$$

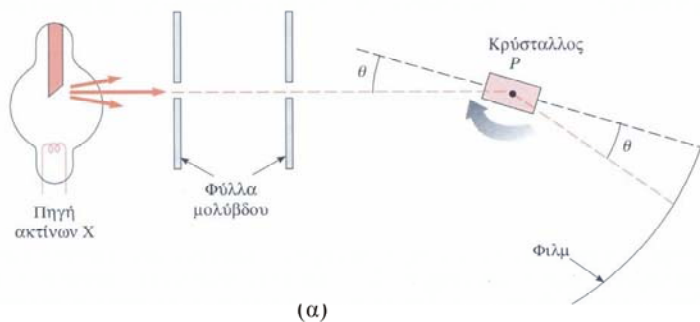
για τα οποία δηλαδή το μήκος της αντιστοιχεί σε ακέραιο αριθμό ημικυμάτων (Σχ. 14). Σε αυτά τα μήκη κύ-
ματος αντιστοιχούν φυσικά και κάποιες συχνότητες που δίνονται από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής,
 $v_m = v/\lambda_m$, με v την ταχύτητα των κυμάτων (8α,β) στη χορδή. Για όλες τις άλλες συχνότητες η ταλάντωση της
χορδής είναι αμελητέα (έχουμε δηλαδή καταστροφική συμβολή μεταξύ των πολλών κυμάτων ίδιας συχνότη-
τας που διαδίδονται στη χορδή). Συνεπώς τα μήκη κύματος στα οποία μπορεί να ταλαντωθεί η χορδή είναι
όπως λέμε **διάκριτα**.

3. Περίθλαση Ακτίνων Χ

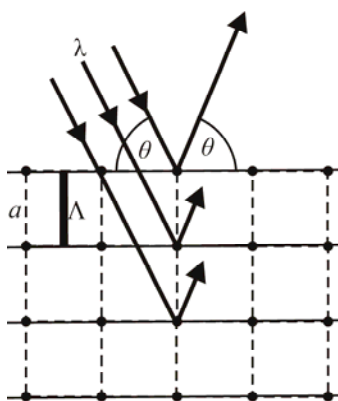
Με τον όρο περίθλαση περι-
γράφουμε τις αποκλίσεις από την ευ-
θύγραμμη διάδοση του φωτός που
παρατηρούνται όταν το φωτεινό κύμα
προσπίπτει σε οπές ή εμποδία δια-
στάσεων συγκρίσιμων με το μήκος
κύματός του. Η περίθλαση είναι ένα
ακόμη κυματικό φαινόμενο που βασί-
ζεται στην υπέρθεση *πολλών* H/M ή
άλλων) κυμάτων και συνεπώς μπορεί
να θεωρηθεί ως υποπερίπτωση του
φαινομένου της συμβολής. Εάν με
τον όρο «εμποδία» αναφερόμαστε σε
τρισδιάστατες περιοδικές δομές όπως



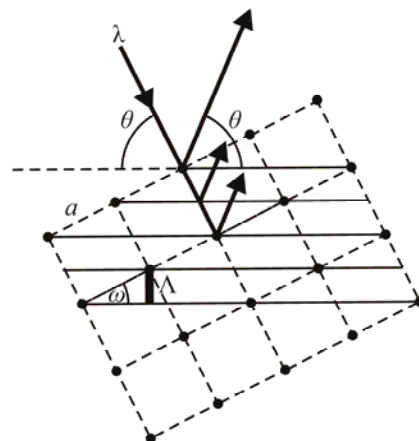
Σχήμα 3.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 4.

τα κρυσταλλικά υλικά (π.χ. ο κρύσταλλος Ni), με χαρακτηριστικές διαστάσεις ~ 0.1 nm, τα συγκρίσιμά μήκη κύματος των H/M κυμάτων βρίσκονται στην περιοχή των ακτίνων X. Στο Σχ. 4 φαίνονται μία διάταξη περίθλασης ακτίνων X και σε λεπτομέρεια η κρυσταλλική δομή (που ... σχεδιάζεται σε δύο διαστάσεις...) στην οποία ανακλώνται οι φωτεινές ακτίνες. Παρατηρούμε ότι οι ακτίνες ανακλώνται από οικογένειες ανακλαστικών επιπέδων. Σε έναν κρύσταλλο υπάρχουν πολλές τέτοιες οικογένειες και δύο παραδείγματα φαίνονται στα Σχ. 4(β) και (γ). Στην οικογένεια του Σχ. 4(β) η απόσταση μεταξύ διαδοχικών επιπέδων είναι ίση με $\Lambda = a$, (κοντινότερη απόσταση μεταξύ γειτονικών ατόμων) ενώ στο Σχ. 4(γ) έχουμε $\Lambda = a \sin \omega$. Για δεδομένα Λ και μήκος κύματος λ , ανάκλαση παρατηρείται μόνο σε συγκεκριμένες γωνίες λόγω ενισχυτικής συμβολής. Για όλες τις άλλες γωνίες η συμβολή είναι καταστροφική. Οι γωνίες ενισχυτικής συμβολής, όπου παρατηρούνται μέγιστα έντασης, δίνονται από τον **νόμο του Bragg**,

$$2\Lambda \sin \theta_n = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

(προσέξτε ότι οι γωνίες θ_n είναι οι συμπληρωματικές των γωνιών πρόσπτωσης όπως αυτές ορίζονται στην οπτική).

Εάν η δομή ενός κρυστάλλου είναι γνωστή μπορούμε να βρούμε το μήκος κύματος των ακτίνων X και η διάταξη του Σχ. 4(α) λειτουργεί ως φασματοσκόπιο σ' αυτή τη φασματική περιοχή. Απεναντίας, εάν γνωρίζουμε το μήκος κύματος των ακτίνων X μπορούμε να βρούμε τις διάφορες αποστάσεις Λ που χαρακτηρίζουν τα ανακλαστικά επίπεδα και, από αυτές, τη δομή του κρυστάλλου.

Κ1. Σωματιδιακή Φύση των Η/Μ Κυμάτων

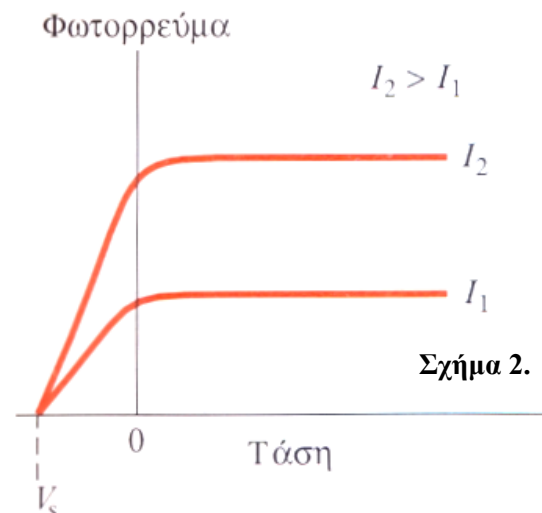
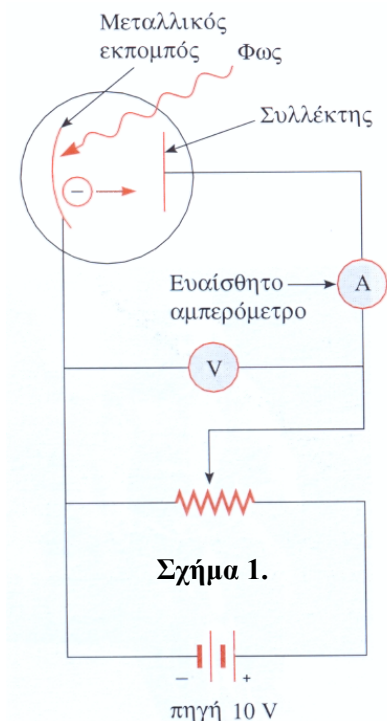
Οι επόμενες παράγραφοι είναι αφιερωμένες στη μελέτη των φαινομένων που οδήγησαν στη ριζική αναθεώρηση της κλασικής αντίληψης για το φως ως συνεχούς Η/Μ ακτινοβολίας χωρίς σωματιδιακή υφή. Το πρώτο αποφασιστικό βήμα έγινε από τον Planck (ακτινοβολία μέλανος σώματος) επιβεβαιώθηκε από τον Einstein (φωτοηλεκτρικό φαινόμενο) και ολοκληρώθηκε από τον Compton (σκέδαση ακτίνων Χ από ελεύθερα ηλεκτρόνια).

1. Η Ακτινοβολία Μέλανος Σώματος

Σημειώσεις Κ. Φουντά.

2. Το Φωτοηλεκτρικό Φαινόμενο

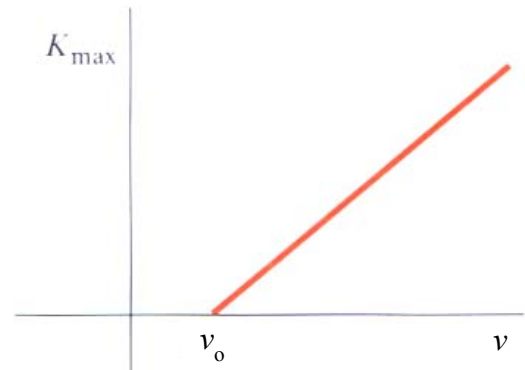
Με τον όρο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο εννοούμε την εκπομπή ηλεκτρονίων από ένα μέταλλο που προκαλείται από την πρόσπτωση ακτινοβολίας (κυρίως υπεριώδους) στην επιφάνειά του. Η σχετική πειραματική διάταξη φαίνεται στο Σχ. 1. Ένα γυάλινος θάλαμος κενού περιέχει δύο ηλεκτρόδια, εκ των οποίων το ένα κατασκευασμένο από το υπ' όψη μέταλλο. Το ηλεκτρόδιο αυτό φωτίζεται με φως συχνότητας ν και έντασης I . Τα παραγόμενα ηλεκτρόνια εξαναγκάζονται να κινηθούν προς το άλλο ηλεκτρόδιο και να συλλεχθούν από αυτό μέσω της εφαρμογής διαφοράς δυναμικού V κατάλληλης πολικότητας μεταξύ των ηλεκτροδίων (το ηλεκτρόδιο-συλλέκτης είναι συνδεδεμένο με το θετικό πόλο της πηγής - κοίτα παράρτημα Π2 στο τέλος του κεφαλαίου). Το πλήθος των ηλεκτρονίων που συλλέγονται στη μονάδα του χρόνου (ρυθμός συλλογής) είναι ανάλογο του μετρούμενου ηλεκτρικού ρεύματος i . Για αρκετά μεγάλες τάσεις επέρχεται κορεσμός του φωτορεύματος και συνεπώς συλλέγεται το σύνολο των ηλεκτρονίων που παράγονται με διάφορες κινητικές ενέργειες. Υπάρχει όμως κάποια μέγιστη κινητική ενέργεια $K_{\max}$, πέραν της οποίας δεν παράγεται κανένα ηλεκτρόνιο. Η ύπαρξη ορίου στη μέγιστη αρχική κινητική ενέργειά τους αποδεικνύεται μέσω της αντιστροφής της πολικότητας της πηγής (ηλεκτρόδιο-συλλέκτης συνδεδεμένο με τον αρνητικό πόλο) και της αύξησης της τάσης κατ' απόλυτη τιμή. Τα ηλεκτρόνια



τότε απωθούνται από το συλλέκτη και μπορούν να φτάσουν σε αυτόν μόνον εάν η αρχική κινητική τους ενέργεια είναι μεγαλύτερη από $e|V|$ (e είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου κατ' απόλυτη τιμή). Παρατηρείται λοιπόν ότι από κάποια τάση αποκοπής $V = -V_s$ ($V_s > 0$) και μετά το ρεύμα μηδενίζεται. Πειραματικά καταγράφονται οι καμπύλες $i(V)$ (Σχ. 2). Από αυτές προκύπτουν τα παρακάτω **πειραματικά δεδομένα**:

1. Το φωτορεύμα αυξάνει ανάλογα με τη φωτεινή ένταση, δηλαδή $i \propto I$. (Σχ. 2).
2. Η μέγιστη ταχύτητα (κινητική ενέργεια $K_{\max}$) των εκπεμπόμενων ηλεκτρονίων δεν εξαρτάται από τη φωτεινή ένταση αλλά μόνο από τη συχνότητα ν της ακτινοβολίας.
3. Φωτορεύμα εμφανίζεται μόνο για συχνότητες ν μεγαλύτερες ή ίσες μιας ελάχιστης τιμής ν_0 (Σχ. 4), *χαρακτηριστικής για κάθε μέταλλο*.
4. Το φωτορεύμα εμφανίζεται σχεδόν *ταυτόχρονα* με την πρόσπτωση της φωτεινής δέσμης στο μέταλλο.

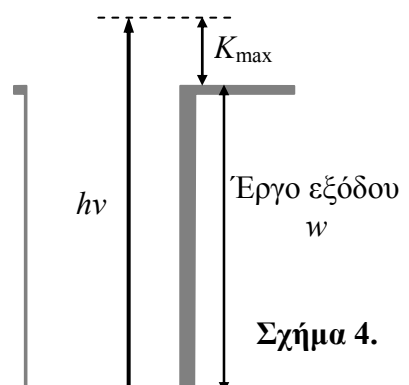
Πριν παρουσιάσουμε την ερμηνεία του φαινομένου από τον Α Einstein, θα παρουσιάσουμε την ερμηνεία (ή, μάλλον, απόπειρα ερμηνείας) στα πλαίσια της Κλασικής Φυσικής ώστε να αντιληφθούμε τα προβλήματα που προκύπτουν. Κατ' αρχήν λοιπόν, στα πλαίσια της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, το προσπίπτον Η/Μ κύμα ασκεί δύναμη ($\vec{F} = -e\vec{E}$) στα ηλεκτρόνια μεταβιβάζοντας τους ενέργεια, η οποία όταν ξεπεράσει μια ορισμένη τιμή οδηγεί στην απόσπασή τους από το μέταλλο. Άρα το φαινόμενο κατ' αρχήν προβλέπεται. Στη συνέχεια, εφόσον $I \propto E_{\max}^2$ (με $E_{\max}$ το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου του Η/Μ κύματος, κοίτα Παράρτημα Π1), αύξηση της I σημαίνει αύξηση του $E_{\max}$, συνεπώς και αύξηση του μέτρου F της $\vec{F}$. Όμως, μεγαλύτερη δύναμη σημαίνει και μεγαλύτερος ρυθμός εξαγωγής (δηλαδή μεγαλύτερο φωτορεύμα i). Συνεπώς το πρώτο πειραματικό δεδομένο εξηγείται από τη κλασική θεωρία. Για τα υπόλοιπα όμως υπάρχει ασυμφωνία



Σχήμα 3.

με το πείραμα. Συγκεκριμένα, μεγαλύτερη I σημαίνει μεγαλύτερο $E_{\max}$, μεγαλύτερη F , μεγαλύτερη επιτάχυνση, συνεπώς και μεγαλύτερη ταχύτητα και κινητική ενέργεια (σε αντίθεση με το σημείο 2 παραπάνω). Αντίθετα, η συχνότητα ν της ακτινοβολίας δεν φαίνεται να παίζει κανένα ρόλο και, επακόλουθα, δεν προβλέπεται οριακή συχνότητα ν_0 (σε αντίθεση με το σημείο 3). Τέλος, προβλέπεται ότι η μεταβίβαση της ενέργειας από το πεδίο στα ηλεκτρόνια είναι βαθμιαία και υπολογίζοντας την απαιτούμενη χρονική διάρκεια βρίσκουμε ότι θα πρέπει να κυμαίνεται από μερικά λεπτά έως και μερικές ώρες (σε αντίθεση με το σημείο 4).

Στα 1905 ο Α Einstein δημοσίευσε την εργασία που εξηγεί τα παραπάνω δεδομένα. Από την εργασία αυτή διαβάζουμε ότι: «...Σύμφωνα με την παραδοχή που προτείνεται εδώ, ή ενέργεια μιας φωτεινής ακτίνας, που εκπέμπεται από μία σημειακή πηγή, δεν είναι συνεχώς κατανεμημένη στο χώρο, αλλά αποτελείται από ένα πεπερασμένο αριθμό ενεργειακών κβάντων, που είναι τελείως εντοπισμένα στο χώρο, χωρίς να διαιρούνται και τα οποία μπορούν να παραχθούν και να απορροφηθούν



Σχήμα 4.

μόνο ως ολόκληρες μονάδες...». Τα ενεργειακά κβάντα του φωτός ονομάστηκαν μετά από λίγο καιρό **φωτόνια**. Πράγματι, με αυτήν την παραδοχή και με τη βοήθεια του Σχ. 4 το φαινόμενο επιδέχεται μια πολλή απλή και κομψή εξήγηση. Το ηλεκτρόνιο πριν απορροφήσει ένα φωτόνιο είναι δεσμευμένο στο μέταλλο λόγω των δυνάμεων που του ασκούνται. Μιλώντας στη γλώσσα της ενέργειας οι δυνάμεις αυτές αντιστοιχούν σε ένα πηγάδι δυναμικής ενέργειας στον πυθμένα του οποίου βρίσκεται εγκλωβισμένο το ηλεκτρόνιο. Το βάθος του πηγαδιού ονομάζεται έργο εξόδου και θα το συμβολίσουμε με w . Το έργο εξόδου είναι χαρακτηριστικό του κάθε μετάλλου. Για να απελευθερωθεί το ηλεκτρόνιο θα πρέπει να του προσφέρουμε ενέργεια ίση ή μεγαλύτερη του w . Εάν του προσφέρουμε ενέργεια μεγαλύτερη από w τότε η επιπλέον ενέργεια θα μετατραπεί σε κινητική (προφανώς, εάν του προσφερθεί ενέργεια ίση με w τότε θα απελευθερωθεί με μηδενική κινητική ενέργεια). Τώρα, σύμφωνα με την παραπάνω παραδοχή, η ενέργεια του Η/Μ πεδίου προσφέρεται με τη μορφή φωτονίων, το καθένα εκ των οποίων είτε απορροφάται εξ' ολοκλήρου, είτε δεν απορροφάται καθόλου. Η δε ενέργειά του κατά Einstein (και κατά Planck πριν από αυτόν) είναι ίση με,

$$E_{\varphi} = h\nu = \hbar\omega \quad (1)$$

όπου h η παγκόσμια σταθερά του Planck και $\hbar = h/2\pi = 1.054 \times 10^{-34}$ J·s. Εάν λοιπόν $E_{\varphi} < w$ το φωτόνιο δεν απορροφάται καθόλου. Εάν όμως $E_{\varphi} \geq w$ απορροφάται εξ' ολοκλήρου και η κινητική ενέργεια με την οποία παράγεται το ηλεκτρόνιο δίνεται από την ακόλουθη πολλή απλή σχέση:

$$K_{\max} = E_{\varphi} - w. \quad (2)$$

Η συχνότητα αποκοπής βρίσκεται από τη (2) εάν θέσουμε $K_{\max} = 0$ ($E_{\varphi} = w$), οπότε και έχουμε ότι

$$\nu_0 = w/h \quad (3)$$

η δε $K_{\max}$ συνδέεται με την τάση αποκοπής μέσω της σχέσης

$$K_{\max} = eV_s. \quad (4)$$

Με βάση τη φωτονική θεωρία έχουμε τις παρακάτω προβλέψεις:

1. Αύξηση της φωτεινής έντασης σημαίνει αύξηση του αριθμού των φωτονίων που προσπίπτουν στην επιφάνεια του μετάλλου στη μονάδα του χρόνου και συνεπώς αύξηση του αριθμού των ηλεκτρονίων που εξάγονται από αυτό ($i \propto I$).
2. Η $K_{\max}$ δεν εξαρτάται από τη φωτεινή ένταση αλλά μόνο από τη συχνότητα ν .
3. Προβλέπεται ελάχιστη τιμή ν_0 , που προσδιορίζεται μόνο από το έργο εξαγωγής w του εκάστοτε μετάλλου.
4. Η απορρόφηση ενός φωτονίου πραγματοποιείται “ακαριαία” (ακριβέστερα εντός $< 1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$).

Προφανώς, όλες οι προβλέψεις είναι σύμφωνες με τα πειραματικά δεδομένα. Να σημειώσουμε ότι η φωτεινή ένταση δίνεται στα πλαίσια της φωτονικής θεωρίας από τη σχέση

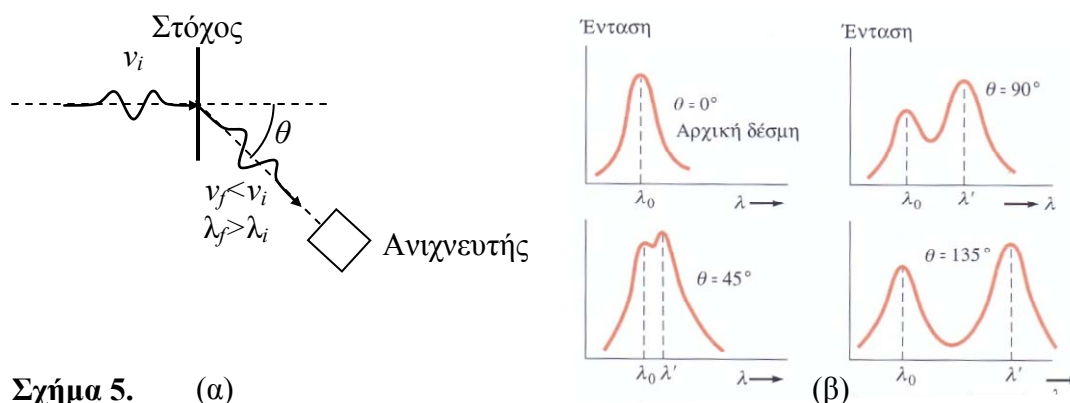
$$I = \frac{n(\hbar\omega)}{S \cdot \Delta t} \quad (5)$$

είναι ίση δηλαδή με την ενέργεια των $n \geq 0$ φωτονίων που πέρασαν από κάποια επιφάνεια S στο χρονικό διάστημα Δt , διαιρεμένης με την S και το Δt (ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας και χρόνου). Ο αριθμός n είναι προφανώς *ακέραιος*. Εισάγεται ξανά εδώ η έννοια της *κβάντωσης* ενός φυσικού μεγέθους (εδώ η ενέργεια της Η/Μ ακτινοβολίας) μια και δεν είναι δυνατόν να έχουμε π.χ. $0.7\hbar\omega$ ή $1.2\hbar\omega$. Σύμφωνα λοιπόν με τον Einstein, η ενέργεια του ελεύθερου Η/Μ κύματος δεν είναι συνεχώς κατανομημένη στο χώρο. Αποτελείται

από αριθμό εντοπισμένων στο χώρο αδιαίρετων φωτονίων. Στο φωτόνιο είναι συγκεντρωμένη όλη του η ενέργεια $h\nu$, όπως συμβαίνει και με τα σωματίδια και σε αντίθεση με τα τυπικά χαρακτηριστικά ενός H/M κύματος (απεντοπισμός ενέργειας και ορμής). Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε κλείνοντας ότι οι απόψεις αυτές του Einstein προχωρούν ένα βήμα παραπέρα τους συλλογισμούς του Planck. Ο τελευταίος δεν αμφισβήτησε τον κλασικό συνεχή χαρακτήρα του ελεύθερου H/M πεδίου αλλά παραδέχθηκε μόνο ότι η ύλη απορροφά ή εκπέμπει H/M ακτινοβολία κατά ασυνεχείς ενεργειακές ποσότητες $h\nu$.

3. Το Φαινόμενο Compton

Όπως είπαμε, τόσο η ενέργεια όσο και η ορμή ενός σωματιδίου είναι συγκεντρωμένες στο χώρο που καταλαμβάνει. Θα μπορούσε να πει κάποιος ότι η εισαγωγή της έννοιας του φωτονίου για την εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου μπορεί να θεωρηθεί ως «τέχνασμα» μέσω του οποίου εξηγούνται φαινομενολογικά τα πειραματικά δεδομένα. Η αποδοχή της φωτονικής θεωρίας απαιτούσε περαιτέρω επιβεβαίωση μέσω και άλλων πειραμάτων που θα υποστήριζαν ότι τα φωτόνια μπορούν πράγματι να θεωρηθούν ως σωματίδια, έχουν δηλαδή και εντοπισμένη ορμή, εκτός από ενέργεια. Στα 1919 ο Einstein έγραψε: «...εάν μια δέσμη ακτινοβολίας προκαλεί στο μόριο την εκπομπή ή απορρόφηση μιας ποσότητας ενέργειας $h\nu$, τότε μεταφέρεται στο μόριο ορμή μεγέθους $h\nu/c_0$ κατά την κατεύθυνση της προσπίπτουσας δέσμης, όταν πρόκειται για απορρόφηση, και αντίθετα προς αυτήν όταν πρόκειται για εκπομπή....». Ακόμη και ο ίδιος που πρότεινε της ιδέα όμως δεν συνέχισε προς την κατεύθυνση αυτή. Η επιβεβαίωση της παραπάνω πρότασης ήλθε το 1923 από τα πειράματα του Compton που ασχολήθηκε με τη σκέδαση H/M ακτινοβολίας (ακτίνες X) από ελεύθερα ηλεκτρόνια. Η πειραματική διάταξη φαίνεται σχηματικά στο Σχ. 5(α) και τα πειραματικά δεδομένα στο Σχ. 5(β). Ακτίνες X συχνότητας ν_i (δηλαδή μήκους κύματος $\lambda_i = c_0/\nu_i$, c_0 η ταχύτητα του φωτός στο κενό)

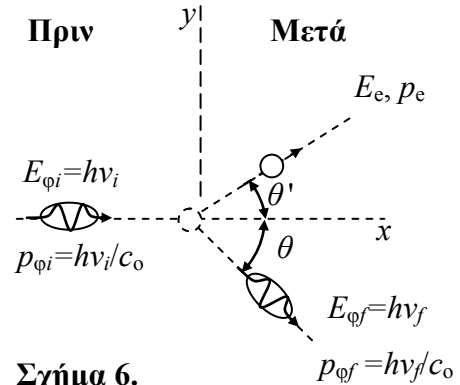


Σχήμα 5. (α)

σκεδάζονται από ένα πολύ λεπτό φύλλο άνθρακα (το πηγάδι δυναμικής ενέργειας στο οποίο είναι εγκλωβισμένα τα εξωτερικά ηλεκτρόνια του άνθρακα είναι πολύ μικρό σε σχέση με την ενέργεια ενός φωτονίου των ακτίνων X, με αποτέλεσμα αυτά να μπορούν να θεωρηθούν με πολλή καλή προσέγγιση «ελεύθερα»). Τα μετρούμενα μεγέθη είναι η συχνότητα ν_f (ακριβέστερα, το μήκος κύματος $\lambda_f = c_0/\nu_f$) και η ένταση της σκεδάζομενης ακτινοβολίας ως συνάρτηση της γωνίας θ μεταξύ αρχικής και τελικής διεύθυνσης της δέσμης (Σχ. 5(α)). Παρατηρείται λοιπόν ότι για κάθε γωνία θ , εκτός από την ακτινοβολία συχνότητας ν_i , υπάρχει ένα

σκεδαζόμενο κύμα μικρότερης συχνότητας $\nu_f < \nu_i$ ($\lambda_f > \lambda_i$), η τιμή της οποίας δεν εξαρτάται ούτε από την προσπίπτουσα φωτεινή ένταση ούτε από το χρόνο ακτινοβολήσης αλλά αποκλειστικά από τη θ (Σχ. 6(β)).

Στα πλαίσια της Κλασικής Φυσικής το ταλαντούμενο ηλεκτρικό πεδίο του προσπίπτοντος Η/Μ κύματος θέτει σε ταλάντωση το ηλεκτρόνιο με συχνότητα ίση με ν_i . Με τη σειρά του, το ταλαντούμενο ηλεκτρόνιο εκπέμπει (λόγω της επιτάχυνσής του) ένα δευτερογενές Η/Μ κύμα με συχνότητα ίση με τη συχνότητα της ταλάντωσής του (ν_i). Λαμβάνοντας υπόψη τη (διπλή) μετατόπιση Doppler αναμένουμε ότι η συχνότητα του εκπεμπόμενου κύματος $\nu_f < \nu_i$ όπως και πράγματι συμβαίνει. Από την άλλη μεριά όμως, η αλληλεπίδραση κύματος-ηλεκτρονίου πραγματοποιείται



Σχήμα 6.

βαθμιαία, οπότε, σε αντίθεση με το πείραμα, αναμένεται εξάρτηση της ν_f από το χρόνο ακτινοβολήσης. Αναμένεται επίσης εξάρτηση της ν_f και από την ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Προφανώς η απόπειρα ερμηνείας στα πλαίσια της Κλασικής Φυσικής είναι ανεπαρκής. Στην προσπάθεια ερμηνείας μέσω της φωτονικής θεωρίας οι P Debye και A Compton γράφουν το 1923: «...τα πειραματικά αποτελέσματα μπορούν να εξηγηθούν εάν θεωρήσουμε τα φωτόνια ως σημειακά σωματίδια ενέργειας $h\nu$ και ορμής $h\nu/c_0$, και εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της σχετικιστικής ενέργειας και ορμής για το ζεύγος φωτονίου-ηλεκτρονίου...». Πράγματι, εάν θεωρήσει κανείς τη σκέδαση ως ένα πρόβλημα κρούσης μεταξύ δύο σωματιδίων (φωτονίου – ηλεκτρονίου – Σχ. 6) και εφαρμόσει τις αρχές διατήρησης ενέργειας και ορμής, αναπαράγει επακριβώς τα πειραματικά δεδομένα. Συγκεκριμένα, από το Σχ. 6 έχουμε,

(ι) Από τη διατήρηση της ενέργειας του συστήματος φωτόνιο-ηλεκτρόνιο πριν και μετά την «κρούση»,

$$E_{\phi i} + m_e c_0^2 = E_{\phi f} + E_e \quad (6)$$

όπου η αρχική και τελική ενέργεια του φωτονίου γράφονται,

$$E_{\phi i} = h \nu_i \quad (7)$$

και

$$E_{\phi f} = h \nu_f \quad (8)$$

αντίστοιχα. Πριν από τη κρούση το ηλεκτρόνιο θεωρείται ακίνητο και στην (6) λαμβάνεται υπ' όψη μόνο ο όρος $m_e c_0^2$ λόγω της μάζας ηρεμίας του m_e . Μετά την κρούση η ενέργειά του γράφεται ως

$$E_e = \sqrt{p_e^2 c_0^2 + m_e^2 c_0^4} \quad (9)$$

με p_e την ορμή του.

(ii) Από τη διατήρηση της ορμής του συστήματος πριν και μετά την «κρούση»,

$$\vec{p}_{\phi i} = \vec{p}_{\phi f} + \vec{p}_e \quad (10)$$

όπου, χρησιμοποιώντας τη γενική σχέση $E = \sqrt{p^2 c_0^2 + m^2 c_0^4}$ και λαμβάνοντας υπ' όψη ότι τα φωτόνια έχουν μηδενική μάζα ηρεμίας, τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{p}_{\phi i}$ και $\vec{p}_{\phi f}$ γράφονται,

$$p_{\varphi i} = \frac{h\nu_i}{c_0} \quad (11)$$

και

$$p_{\varphi f} = \frac{h\nu_f}{c_0} . \quad (12)$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν και οι σχέσεις (7) και (8). Η διανυσματική σχέση (10) απλοποιείται περαιτέρω εάν αναλύσουμε τις ορμές του φωτονίου και του ηλεκτρονίου μετά την κρούση στους άξονες x και y του Σχ. 6. Ο άξονας x έχει τη διεύθυνση διάδοσης του φωτονίου πριν από την κρούση και ο άξονας y είναι κάθετος στον πρώτο. Τα διανύσματα $\vec{p}_{\varphi f}$ και $\vec{p}_e$ σχηματίζουν γωνίες θ και θ' αντίστοιχα με τον άξονα x . Προφανώς, εφόσον πριν από την κρούση η συνιστώσα της ορμής στον άξονα y είναι μηδενική, το ίδιο θα συμβαίνει και μετά από την κρούση. Από αυτή την απαίτηση έχουμε ότι,

$$p_e \sin \theta' - p_{\varphi f} \sin \theta = 0 . \quad (13)$$

Όσο για τη διατήρηση της ορμής στον άξονα x , αυτή εκφράζεται μέσω της σχέσης,

$$p_{\varphi i} = p_e \cos \theta' + p_{\varphi f} \cos \theta . \quad (14)$$

Έχουμε λοιπόν ένα σύστημα εξισώσεων που αποτελείται από τις (6), (13) και (14). Τις ξαναγράφουμε χρησιμοποιώντας και τις ενδιάμεσες σχέσεις (7), (8), (11) και (12):

$$h\nu_i + m_e c_0^2 = h\nu_f + \sqrt{p_e^2 c_0^2 + m_e^2 c_0^4} \quad (15\alpha)$$

$$p_e \sin \theta' - \frac{h\nu_f}{c_0} \sin \theta = 0 \quad (15\beta)$$

$$\frac{h\nu_i}{c_0} = p_e \cos \theta' + \frac{h\nu_f}{c_0} \cos \theta \quad (15\gamma)$$

Για να συγκρίνουμε το τελικό αποτέλεσμα με το πείραμα θα πρέπει να βρούμε μία, εξαρτώμενη από την γωνία θ , σχέση μεταξύ των συχνοτήτων ν_i και ν_f ή, καλύτερα, μεταξύ των αντίστοιχων μηκών κύματος. Συνεπώς, η γωνία θ μπορεί να θεωρηθεί ως μια δεδομένη (γνωστή) παράμετρος του προβλήματος (όπως και η αρχική συχνότητα του φωτονίου ν_i). Άρα τα προς υπολογισμό μεγέθη είναι τρία (όσες και οι εξισώσεις (15α,β,γ)). Συγκεκριμένα, είναι η γωνία θ' , το μέτρο της ορμής του ηλεκτρονίου p_e και η τελική συχνότητα ν_f (ή μήκος κύματος λ_f) του φωτονίου. Συνιστάται να λύσετε λεπτομερώς το σύστημα (15) μόνοι σας. Εδώ, θα δώσουμε την κεντρική σχέση,

$$\frac{1}{h\nu_f} - \frac{1}{h\nu_i} = \frac{1}{m_e c_0^2} (1 - \cos \theta) \quad (16)$$

που συνήθως γράφεται στην πιο γνωστή μορφή (μέσω της οποίας αναπαράγονται επακριβώς τα πειραματικά δεδομένα),

$$\Delta\lambda \equiv \lambda_f - \lambda_i = \lambda_c (1 - \cos \theta), \quad \lambda_c = \frac{h}{m_e c_0} \quad (17)$$

όπου, $\lambda_C = 0.00243 \text{ nm}$ ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) το λεγόμενο «μήκος κύματος Compton» (πολλές φορές θα δείτε και τη μορφή $\lambda_C = \hbar / m_e c$). Η παραπάνω ανάλυση μας δίνει, εκτός από τις θ' και p_e , και άλλες πληροφορίες. Π.χ. η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την κρούση,

$$K = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 = h\nu_i - h\nu_f. \quad (18)$$

και η τελική έκφραση βρίσκεται με τη χρήση της (16) μέσω της οποίας σχετίζονται οι συχνότητες ν_i και ν_f .

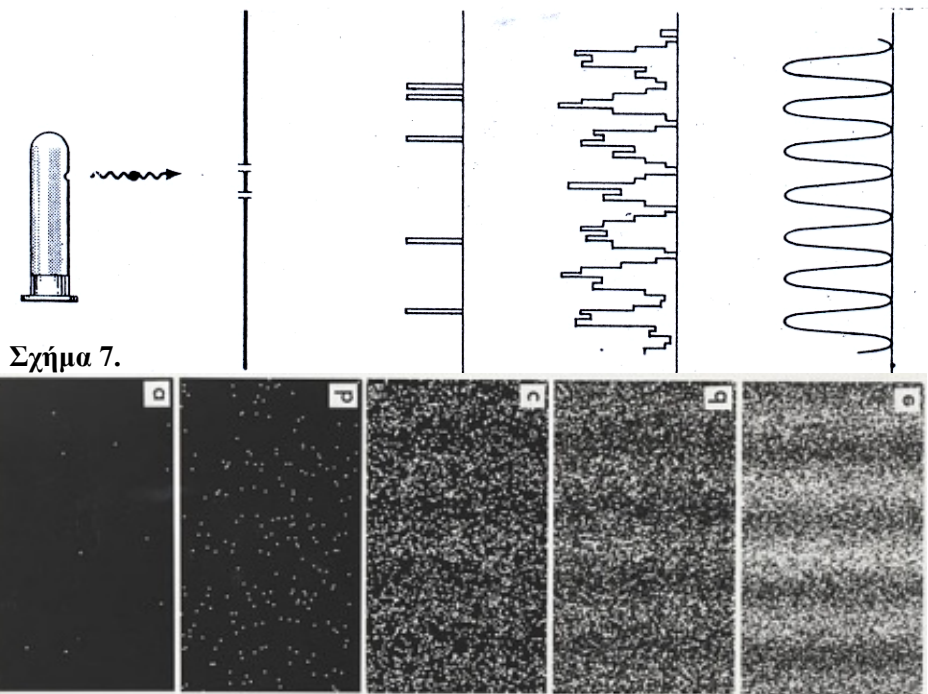
Κλείνουμε τη συζήτηση για το φαινόμενο Compton με δύο διευκρινιστικές παρατηρήσεις:

Πρώτον, γιατί έπρεπε να χρησιμοποιήσει ο Compton ακτίνες X μήκους κύματος $\lambda_i = 0.0712 \text{ nm}$ αντί για, π.χ., ορατό φως μήκους κύματος μερικών εκατοντάδων nm; Η επιλογή αυτή λοιπόν έχει να κάνει με τη δυνατότητα άνετης παρατήρησης του φαινομένου, για την οποία απαιτείται μία σχετική μεταβολή $\Delta\lambda/\lambda_i$ της τάξης του 1-5%. Είναι εύκολο να δείτε και μόνοι σας ότι για $\lambda_i = 0.0712 \text{ nm}$ και $\theta = 90^\circ$ η (17) προβλέπει $\Delta\lambda/\lambda_i = 3.4\%$. Αντίθετα για ορατό φως με $\lambda_i \sim 550 \text{ nm}$ (όπου βρίσκεται το μέγιστο εκπομπής του Ηλιακού φάσματος/μέλαν σώμα) η αντίστοιχη σχετική μεταβολή είναι $\Delta\lambda/\lambda_i \sim 10^{-4}\%$.

Δεύτερον, γιατί σε κάθε γωνία θ του Σχ. (5β) υπάρχει πάντα και σκεδαζόμενη ακτινοβολία στο αρχικό μήκος κύματος λ_f ; Η ακτινοβολία αυτή προέρχεται από τα από ισχυρώς δέσμια εσωτερικά ηλεκτρόνια του άνθρακα (στόχου) που παραμένουν “ακίνητα” τόσο πριν όσο και μετά την κρούση με το φωτόνιο (σχέση (15α), $h\nu_i + m_e c^2 = h\nu_f + m_e c^2 \rightarrow \nu_i = \nu_f$).

4. Το Πείραμα του Young με Φωτόνια & Σύνοψη

Αναλύοντας τα κύρια αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη των παραπάνω φαινομένων μπορούμε να αναρωτηθούμε “Τελικά τι είναι το φως; Κύμα ή ρεύμα σωματιδίων (φωτονίων); Και εάν αποτελείται από σωματίδια τι νόημα έχει να μιλάμε για καθαρά κυματικά χαρακτηριστικά όπως η συχνότητα ή το μήκος κύματος;”



Σχήμα 7.

Για να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα θα πρέπει να θυμηθούμε ότι διαχωρισμός υπάρχει μόνον από τη σκοπιά της Κλασικής Φυσικής και της καθημερινής μας, μακροσκοπικής, εμπειρίας όπου κύματα και σωματίδια αντιμετωπίζονται ως «...δύο ξεχωριστές και αμοιβαία αποκλειόμενες φυσικές οντότητες...». Για να δούμε πως συνδυάζονται ο κυματικός και σωματιδιακός χαρακτήρας του φωτονίου θα ανα-

τρέξουμε στο πείραμα συμβολής του Young. Στο παράρτημα Π1 το πείραμα αυτό περιγράφεται χρησιμοποιώντας την κυματική «ταυτότητα» των H/M κυμάτων. Την περιγραφή αυτή πρέπει να τη γνωρίζει ο αναγνώστης πριν προχωρήσει στην ανάγνωση της παρούσας παραγράφου όπου θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο το ίδιο τελικό, πειραματικό, αποτέλεσμα αναπαράγεται μέσω της σωματιδιακής φύσης των H/M κυμάτων. Φανταστείτε λοιπόν μία φωτεινή πηγή της οποίας την ένταση ελαττώνουμε σε τέτοιο βαθμό ώστε σε κάθε στιγμή να εκπέμπει μόνο ένα φωτόνιο τη φορά. Το φωτόνιο περνά από μία από τις δύο σχισμές (χωρίς να γνωρίζουμε ποια είναι αυτή) και τελικά φτάνει μέχρι την οθόνη παρατήρησης όπου και ανιχνεύεται. Οι φωτο-ανιχνευτές, που είναι κατανομημένοι κατά μήκος (και πλάτος) της οθόνης παρατήρησης, ανιχνεύουν το κάθε φωτόνιο ένα-προς-ένα. Σε κάθε άφιξη φωτονίου προσθέτουν μία μονάδα στον αριθμό φωτονίων που έχουν ήδη ανιχνεύσει προηγουμένως. Στη αρχή του πειράματος τα λίγα αρχικά φωτόνια ανιχνεύονται σε θέσεις που φαίνονται να είναι τυχαίες (Σχ. 7). Λίγο αργότερα παρατηρούμε ότι σχηματίζεται σιγά-σιγά η γνωστή μας εικόνα συμβολής, παρουσιάζοντας όμως ακόμα μια κάποια «διακριτότητα». Όταν όμως μετρηθεί ένας τεράστιος αριθμός φωτονίων η «διακριτότητα» δίνει τη θέση της στην ομαλή εικόνα συμβολής που προβλέπεται από την H/M θεωρία. Το πείραμα αυτό εκτελέστηκε για πρώτη φορά επιτυχώς από τον G I Taylor το 1909.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε λοιπόν ότι (i) τα φωτόνια ανιχνεύονται ως σωματίδια, δηλαδή αλληλεπιδρούν ως μονάδες με την ύλη (π.χ. φωτο-ανιχνευτές) και (ii) εμφανίζουν και κυματική φύση εφόσον παράγουν καθαρά κυματικά φαινόμενα, όπως η συμβολή και η περίθλαση, ειδικά όταν ο αριθμός τους είναι πολύ μεγάλος (μακροσκοπικός). Συνεπώς, το φως έχει και κυματική και σωματιδιακή φύση που εκδηλώνονται κατά περίπτωση και είναι απαραίτητες και συμπληρωματικές.

Π2. Η Δυναμική Ενέργεια σε Σταθερό Ηλεκτρικό Πεδίο

Εφόσον στο μάθημα της Σύγχρονης Φυσικής Ι πρόκειται να ασχοληθούμε εκτενώς με τη δυναμική ενέργεια, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε με κάποια λεπτομέρεια τον μηχανισμό συλλογής ή αποκοπής του ρεύματος των ηλεκτρονίων στο απλό κύκλωμα που χρησιμοποιείται στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.

Όταν θέλουμε να συλλέξουμε όλα τα παραγόμενα ηλεκτρόνια χρησιμοποιούμε τη συνδεσμολογία του Σχ. 1(α). Μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή δημιουργείται σταθερό ηλεκτρικό πεδίο, μέτρου $V_{\max}/d$ (η τάση $V_{\max} > 0$ και d η απόσταση μεταξύ των οπλισμών). Το γειωμένο ηλεκτρόδιο ($V=0$) είναι κατασκευασμένο από το μέταλλο που μελετάμε και το οποίο φωτίζεται με ακτινοβολία συχνότητας ν , οπότε και εξάγονται ηλεκτρόνια. Το άλλο ηλεκτρόδιο συνδέεται με το θετικό πόλο της πηγής και τα ηλεκτρόνια ταξιδεύουν προς αυτό. Το ηλεκτρικό δυναμικό μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή γράφεται ως,

$$V(x) = V_{\max} \frac{x}{d} \quad 0 \leq x \leq d \quad (1)$$

και είναι σχεδιασμένο στο Σχ. 1(β). Η δυναμική ενέργεια συνδέεται με το ηλεκτρικό δυναμικό μέσω της σχέσης $U=q \cdot V$. Το φορτίο των ηλεκτρονίων είναι $q = -e$ ($e > 0$). Συνεπώς, η δυναμική ενέργειά τους, $U(x) = -e \cdot V(x)$, θα είναι μηδενική στο σημείο $x=0$ και αρνητική σε όλα τα υπόλοιπα σημεία μέχρι το $x=d$, όπως φαίνεται στο Σχ. 1(γ). Στο σημείο $x=0$ παράγονται τα ηλεκτρόνια με κινητική ενέργεια $K_{\max}$. Η μηχανική ενέργεια, $E=K+U$, θα είναι ίση με $K_{\max}$ (εφόσον στο σημείο αυτό $U(0)=0$). Η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή κατά την κίνηση κάθε ηλεκτρονίου μέχρι το άλλο ηλεκτρόδιο. Κατά τη διαδρομή, η κινητική ενέργεια

$$K(x) = E - U(x) = K_{\max} - \left(-eV_{\max} \frac{x}{d} \right) = K_{\max} + eV_{\max} \frac{x}{d} \quad (2)$$

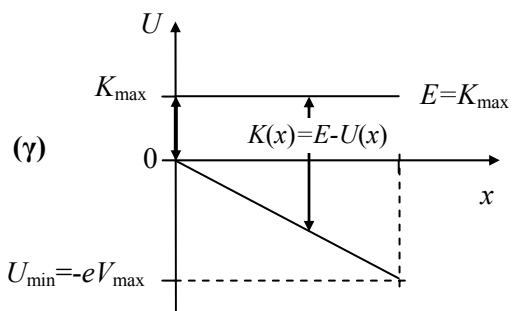
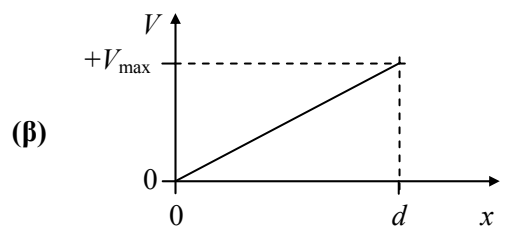
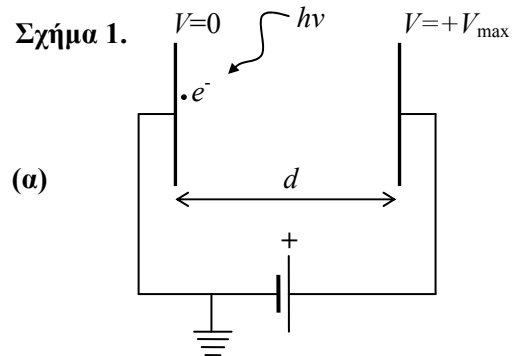
θα αυξάνει συνεχώς (επιταχυνόμενη κίνηση).

Εάν θέλουμε να επιβραδύνουμε τα ηλεκτρόνια αντιστρέφουμε την πολικότητα της πηγής όπως φαίνεται στο Σχ. 2(α). Το ηλεκτρικό δυναμικό γράφεται τώρα ως,

$$V(x) = -V_{\max} \frac{x}{d} \quad 0 \leq x \leq d \quad (3)$$

και είναι σχεδιασμένο στο Σχ. 2(β). Προφανώς, τώρα η δυναμική ενέργεια είναι μηδενική στο $x=0$ και παντού θετική μέχρι το $x=d$. Διακρίνουμε τις εξής παρακάτω περιπτώσεις:

Σχήμα 1.

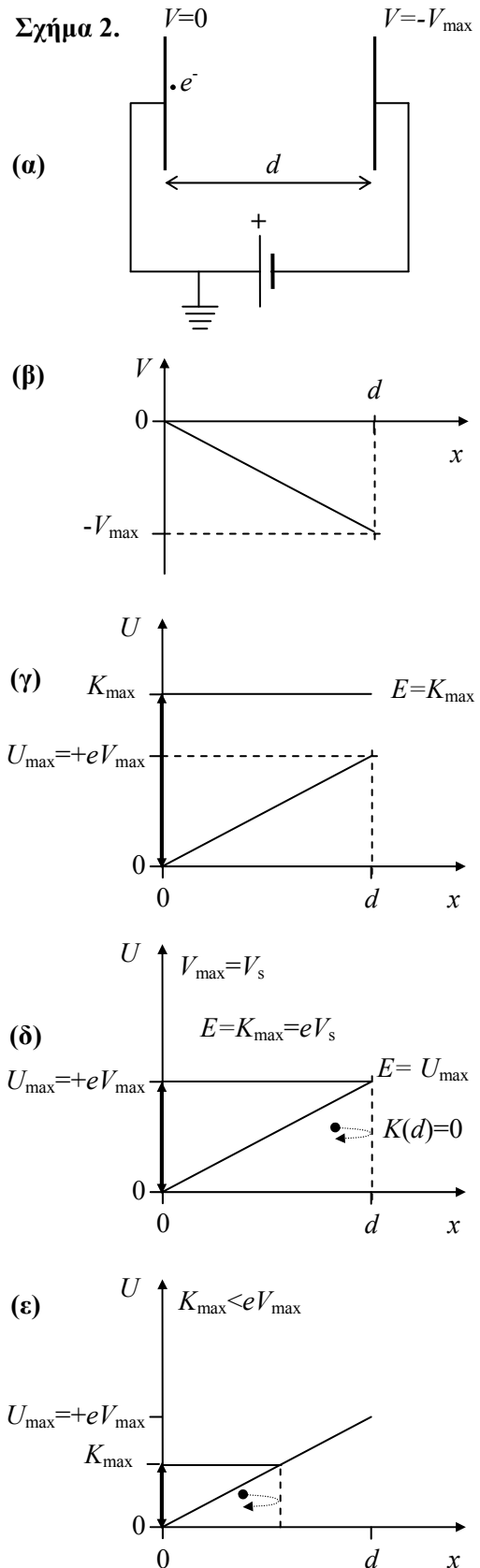


(α) Εάν $E = K_{\max} > U(d) = e \cdot V_{\max}$ (Σχ. 2(γ)), τότε τα ηλεκτρόνια φτάνουν στο απέναντι ηλεκτρόδιο με μειωμένη κινητική ενέργεια $K(d) = K_{\max} - eV_{\max}$ αλλά παρ' όλα αυτά ανιχνεύονται.

(β) Εάν $E = K_{\max} = U(d)$ (Σχ. 2(δ)), τότε τα ηλεκτρόνια φτάνουν στο σημείο $x=d$ με μηδενική κινητική ενέργεια και μόλις φτάνουν στο ηλεκτρόδιο σταματούν, αντιστρέφουν την πορεία τους και τελικά δεν ανιχνεύονται. Αυτή η οριακή τιμή της τάσης $V_{\max}$ ονομάζεται *τάση αποκοπής* και συμβολίζεται με V_s .

(γ) Εάν $E = K_{\max} < U(d)$ (Σχ. 2(ε)), τότε η κινητική ενέργεια θα μηδενιστεί πριν καν τα ηλεκτρόνια φτάσουν στο απέναντι ηλεκτρόδιο. Θα σταματήσουν και θα αντιστρέψουν την πορεία τους (κλασικό σημείο αντιστροφής) σε εκείνη τη θέση x για την οποία $E = U(x)$. Συνεπώς, ούτε σε αυτή την περίπτωση θα ανιχνευτούν. Δεν έχει λοιπόν νόημα να αυξάνουμε (κατ' απόλυτη τιμή) την τάση πέραν της τάσης αποκοπής V_s .

Σχήμα 2.



K1. Ασκήσεις/Προβλήματα

Μέλαν Σώμα - Φωτόνια

1. Αποδείξτε την κλασσική σχέση για την μέση ενέργεια ανά στάσιμο κύμα,

$$\bar{E} = \int_0^{\infty} EP(E)dE = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE} \int_0^{\infty} E e^{-E/kT} dE = kT. \text{ Δίδονται } \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a} \text{ και } x e^{-ax} = -\frac{d(e^{-ax})}{da}$$

2. Αποδείξτε την σχέση

$$\bar{E} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cdot P_n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nhf/kT}} \sum_{n=0}^{\infty} nhf \cdot e^{-nhf/kT} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$$

της μέσης ενέργειας ανά στάσιμο κύμα σύμφωνα με τη Φωτονική Θεωρία. Δίδεται ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(hf/kT)} = \frac{1}{1 - e^{-hf/kT}} \text{ και } x e^{-ax} = -\frac{d(e^{-ax})}{da}$$

3. Με τη βοήθεια της σχέσης του Planck

$$u(f, T)df = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{e^{hf/kT} - 1} df$$

για την καμπύλη φασματικής πυκνότητας ενέργειας μέλανος σώματος αποδείξτε ότι η συχνότητα όπου η κατανομή εμφανίζει μέγιστο, $f_{\max}$, γράφεται ως $f_{\max} = \text{σταθερά} \cdot T$ και βρείτε τη σταθερά.

Δίδεται ότι οι λύσεις της εξίσωσης $3(e^x - 1) - x e^x = 0$ είναι $x_1=0$ και $x_2=2.82144$.

4. Με τη βοήθεια της σχέσης του Planck

$$u(f, T)df = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{e^{hf/kT} - 1} df$$

για την καμπύλη φασματικής πυκνότητας ενέργειας μέλανος σώματος αποδείξτε ότι η ολική ενέργεια που εκπέμπεται από το σώμα ανά μονάδα όγκου δίνεται από τον νόμο των Stefan-

Boltzmann $u_{\text{tot}} = \sigma' T^4$ και προσδιορίστε τη σταθερά σ' . Δίδεται ότι $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$.

5. Ποια η συχνότητα και η ενέργεια ενός φωτονίου για μήκος κύματος 632.8 nm;

6. Η φωτεινή ισχύς που εκπέμπει μια φωτεινή πηγή είναι 1 μW. Εκφράστε την ισχύ αυτή σε αριθμό φωτονίων ανά μονάδα χρόνου για μήκος κύματος εκπομπής (i) 500 nm και (ii) 250 nm.

7. Ένας ανιχνευτής φωτός (το μάτι σας) έχει επιφάνεια $2 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ και απορροφά το 80% της φωτεινής ακτινοβολίας πράσινου χρώματος ($\lambda=500 \text{ nm}$) που προσπίπτει σε αυτόν. Ο ανιχνευτής βρίσκεται απέναντι από φωτεινή πηγή που εκπέμπει ισότροπα φως αυτού του μήκους κύματος. Η απόσταση πηγής-ανιχνευτή είναι 3 m. Εάν ο ανιχνευτής απορροφά φωτόνια με ρυθμό 4 φωτόνια/sec ποια η ισχύς της φωτεινής πηγής;

+Φωτοηλεκτρικό

8. Λεπτό φύλλο Καλίου (K) απέχει απόσταση $r=3.5$ m από σημειακή πηγή ισχύος 1.5 W που εκπέμπει σφαιρικά κύματα. Το έργο εξόδου του K είναι $\Phi=2.2$ eV. Υποθέστε ότι η φωτεινή ενέργεια της πηγής που φτάνει στο φύλλο απορροφάται από αυτό σταδιακά και συνεχώς, δηλαδή σύμφωνα με τη Κλασσική H/M θεωρία και όχι σύμφωνα με τη Φωτονική Θεωρία. Σε πόσο χρόνο το φύλλο θα απορροφήσει ενέργεια αρκετή ώστε να αποβάλει ένα ηλεκτρόνιο; Υποθέστε ότι το φύλλο απορροφά πλήρως το προσπίπτον φως και ότι η «ενεργός επιφάνεια» εντός της οποίας το ηλεκτρόνιο απορροφά φως είναι μια κυκλική περιοχή ακτίνας 5×10^{-11} m (ατομική ακτίνα). Παίζει κάποιο ρόλο το μήκος κύματος της ακτινοβολίας;

9. Ένα μεταλλικό φύλλο ακτινοβολείται με φως κάποιου συγκεκριμένου μήκους κύματος. Ποιο ή ποια από τα επόμενα θα καθορίσουν εάν ηλεκτρόνια θα εξαχθούν του μετάλλου. (α) Η ένταση του φωτός, (β) ο χρόνος έκθεσης στο φως, (γ) η θερμική αγωγιμότητα του φύλλου, (δ) η επιφάνεια του φύλλου, (ε) το είδος του μετάλλου.

10. Κάποιο μέταλλο έχει έργο εξαγωγής 4.2 eV. Βρείτε τη συχνότητα και το μήκος κύματος ακτινοβολίας κατωφλίου για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Υπολογίστε τη τάση αποκοπής εάν φωτίσουμε το μέταλλο με φως μήκους κύματος 200 nm.

11. Σε διάταξη μελέτης του φωτοηλεκτρικού φαινομένου διαπιστώνεται ότι όταν η μεταλλική επιφάνεια φωτίζεται με μονοχρωματική δέσμη φωτός μήκους κύματος 300 nm, η τάση αποκοπής είναι 1.2 V. Προσδιορίστε την μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων, το έργο εξόδου του υλικού και το μήκος κύματος κατωφλίου.

12. Ο Ήλιος μπορεί να θεωρηθεί ως μέλαν σώμα θερμοκρασίας 5800 K. Θέλουμε να μελετήσουμε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο χρησιμοποιώντας το μέγιστο εκπομπής του ηλιακού φωτός. Τα έργα εξόδου των μετάλλων Li, Be και Hg 2.3, 3.9 και 4.5 eV αντίστοιχα. Ποιο μέταλλο πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να παρατηρήσουμε φωτοηλεκτρόνια; Δίδεται ότι $\lambda_{\max} T = 2.898 \times 10^{-3}$ m·K.

13. Επίπεδη πλάκα μετάλλου έργου εξόδου 4.959 eV έχει εμβαδόν 1 cm^2 . Φωτεινή δέσμη τη φωτίζει ολόκληρη και η έντασή της στην επιφάνειά της είναι 10^{-6} W/cm^2 . Η πλάκα απορροφά μόνο το 4% της έντασης αυτής ενώ από την απορροφημένη ενέργεια μόνο το 5% βρίσκεται στη φασματική περιοχή που μπορεί να παράγει φωτοηλεκτρόνια (α) Πόσο είναι το μέγιστο φωτορεύμα που αναμένουμε να μετρήσουμε; (β) Κατά πόσο θα αλλάξει το φωτορεύμα εάν εστιάσουμε τη φωτεινή δέσμη σε 0.5 cm^2 ;

14. Πρόβλημα Serway 14 (σελ. 86)

Σκέδαση Compton

15. Αποδείξτε ότι ένα φωτόνιο δεν μπορεί να απορροφηθεί πλήρως από ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο.
16. Συγκρίνετε την ενέργεια ενός φωτονίου στο ορατό φάσμα ($\lambda=500 \text{ nm}$) με αυτή ενός φωτονίου ακτίνων X ($\lambda=10 \text{ pm}$).
17. Ακτίνες X μήκους κύματος 10 pm σκεδάζονται από στόχο άνθρακα. Η σκεδαζόμενη δέσμη παρατηρείται στις 90° . (α) Ποια η μετατόπιση Compton $\Delta\lambda$; (β) Ποια η ενέργεια ανάκρουσης του ηλεκτρονίου; (γ) Ποια η % μείωση της ενέργειας του φωτονίου;
18. Δείξτε ότι όταν φωτόνιο ενέργειας $E_o=hf_o$ σκεδάζεται από ένα αρχικά ακίνητο ηλεκτρόνιο, η μέγιστη ενέργεια ανάκρουσης δίνεται από τη σχέση $K_{\max} = E_o^2 / (E_o + m_e c^2 / 2)$.
19. Η μέγιστη ενέργεια που προσδίδεται σε ένα ηλεκτρόνιο κατά τη σκέδαση Compton είναι 30 keV . Ποιο το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτονίου;
20. Προβλήματα Serway, 35 (σελ. 87) και μία εκ των 30 ή 34 (σελ. 87).

K2. Η Σωματιδιακή Φύση της Ύλης (Αρχές 20^{ου} Αιώνα)

1. Προϊστορία

Στην Αρχαία Ελλάδα (~4^{ος} αιώνας π.Χ.) υπήρξαν πολλές θεωρίες που αφορούσαν τη σύσταση των σωμάτων, δηλαδή την ύλη. Οι θεωρίες αυτές ήταν κατά βάση φιλοσοφικές και δεν στηρίζονταν σε κανένα πειραματικό δεδομένο, πλησιέστερη δε στη σημερινή μας αντίληψη ήταν η Ατομική Θεωρία των Δημόκριτου και Λεύκιππου που υποστήριζαν ότι: (▪) Η ύλη είναι ασυνεχής (Σωστό), αποτελείται από άτομα (Σ), δηλαδή άτμητα σωματίδια (Λάθος). (▪) Τα άτομα διαφέρουν κατά το σχήμα και κατά το μέγεθος (~Σ). (▪) Δεν καταστρέφονται (~Λ) και δεν δημιουργούνται εκ του μηδενός (Σ). (▪) Βρίσκονται σε συνεχή κίνηση (Σ), τα δε φυσικά και χημικά φαινόμενα οφείλονται στην κίνηση των ατόμων (~Σ) και, τέλος, (▪) οι χημικές ενώσεις προέρχονται από ένωση ατόμων (Σ!) και η διάσπαση των χημικών ενώσεων οφείλεται στον αποχωρισμό των ατόμων (Σ!). Η θεωρία αυτή, παρ' όλο που όπως βλέπουμε περιέχει αρκετά αληθή σημεία, καταπολεμήθηκε έντονα από τους Πλάτωνα και Αριστοτέλη και έπεσε στην αφάνεια έως τις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Την περίοδο αυτή οι χημικοί είχαν πλέον στα χέρια τους σειρά πειραματικών δεδομένων που την υποστήριζαν.

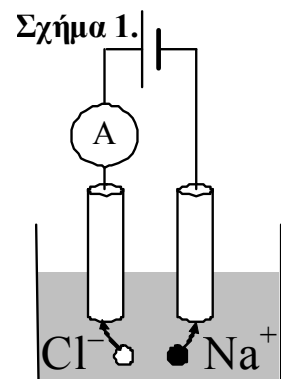
2. Από το Faraday στο Rutherford μέσω του J.J. Thomson και του Millikan

2.1 Faraday, J.J. Thomson και Millikan – Ανακάλυψη του ηλεκτρονίου

Μπορούμε να πούμε ότι η νεώτερη ιστορία της Ατομικής Θεωρίας ξεκινά από τα πειράματα ηλεκτρόλυσης του Faraday το 1833 που διαπίστωσε ότι εάν φορτίο 96500 Cb (1 Faraday) διέλθει από τήγμα NaCl, συλλέγονται 23 gr Na (κάθοδος) και 35.5 gr Cl (άνοδος). Δηλαδή, ακριβώς 1gr-at κάθε (μονοσθενούς) στοιχείου. Η παρατήρηση αυτή γενικεύεται και για δισθενή ή τρισθενή στοιχεία και οι συνέπειές της (αν και δεν έγιναν άμεσα αντιληπτές) είναι ότι:

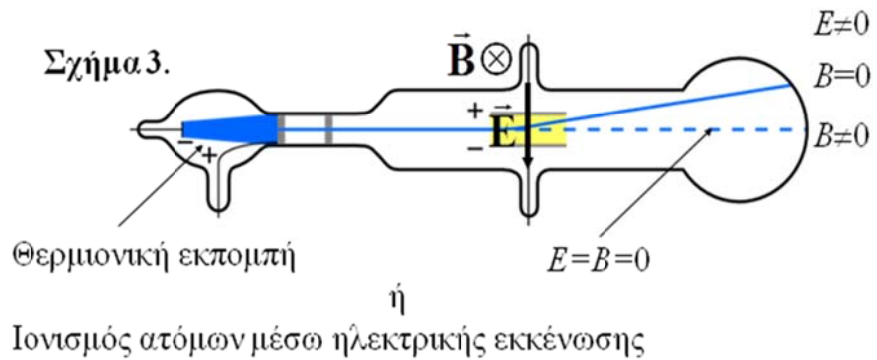
- Η ύλη απαρτίζεται από μόρια που με τη σειρά τους απαρτίζονται από άτομα.
- Τα άτομα είναι ηλεκτρικά ουδέτερα αλλά δεν είναι άτμητα. Αποτελούνται από υποατομικά (θετικά και αρνητικά φορτισμένα) σωματίδια άγνωστης μάζας.
- Η λεπτομερής δομή του ατόμου είναι επίσης άγνωστη.
- Το μέγεθός του όμως (~10⁻¹⁰ m) μας είναι προσεγγιστικά γνωστό από τη Χημεία.
- Το φορτίο είναι κβαντωμένο (διάκριτο) αφού μόνο ακέραιος αριθμός φορτίων φτάνει στα ηλεκτρόδια.

Το επόμενο αποφασιστικό βήμα πραγματοποιήθηκε από το J.J. Thomson μέσα από τη δουλειά του για τη φύση των καθοδικών ακτίνων. Οι ακτίνες αυτές, που ανακαλύφθηκαν το 1869 (Hithorf),

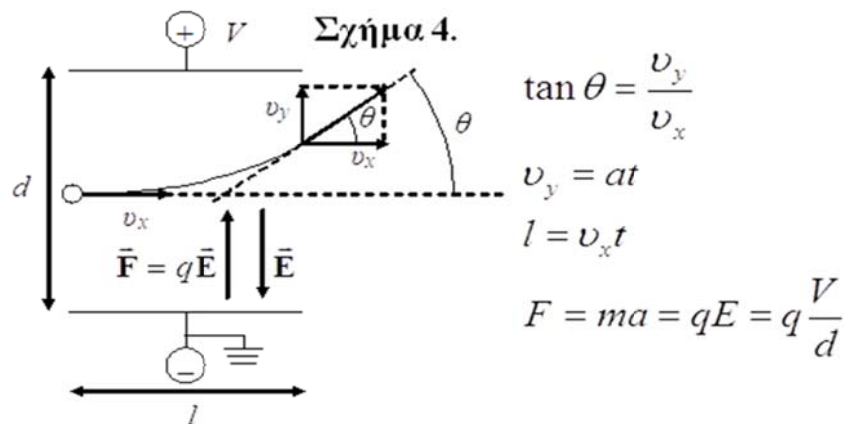


εκπέμπονται από την κάθοδο (-) ενός σωλήνα κενού (Σχ. 2) και η διαμάχη για τη φύση τους κράτησε ~30 χρόνια. Αναφέρθηκαν ιδέες όπως των ηλεκτρικά φορτισμένων ατόμων (Crookes), των «κυμάτων αιθέρα» και μιας νέας μορφής H/M κυμάτων (Wiedemann, Hertz, Goldstein). Το 1897 ο J.J. Thomson σχεδιάζει και εκτελεί το ευφρές για την ε-

ποχή του πείραμα του Σχ. 3. Συγκεκριμένα, στο σωλήνα κενού που χρησιμοποίησε, οι καθοδικές ακτίνες παράγονταν είτε μέσω του ιονισμού ατομικών αερίων σε μια ηλεκτρική εκκένωση είτε μέσω



της θερμιοτικής εκπομπής (ο όρος «θερμιοτική εκπομπή» αναφέρεται σήμερα στην εξαγωγή ηλεκτρονίων από ένα θερμαινόμενο μέταλλο-άνοδος). Στη συνέχεια, οι ακτίνες περνούσαν σε ένα δεύτερο χώρο του σωλήνα όπου μπορούσε να εφαρμοστεί ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο (κατακόρυφης διεύθυνσης στο σχήμα) μεταξύ των οπλισμών ενός πυκνωτή και ένα μαγνητικό πεδίο κάθετο στο πρώτο (οριζόντιο στο σχήμα). Χωρίς την εφαρμογή κανενός από τα δύο πεδία, οι καθοδικές ακτίνες χτυπούσαν στο κέντρο της φθορίζουσας



οθόνης ανίχνευσης. Η εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου εξέτρεπε τη δέσμη κατά μετρήσιμη γωνία θ όπως φαίνεται στο Σχ. 4. Το γεγονός ότι η δέσμη εκτρέπεται απέκλειε την H/M ακτινοβολία, και οδηγούσε στο συμπέρασμα ότι έχουμε να κάνουμε με δέσμες φορτισμένων σωματιδίων. Επιπλέον, το φορτίο τους είναι αρνητικό, όπως συνάγεται από την κατεύθυνση της εκτροπής. Χρησιμοποιώντας την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων και τις σχέσεις της κινηματικής (Σχ. 4), καταλήγουμε στον υπολογισμό της εκτροπής,

$$\tan \theta = \frac{q}{m} \frac{l}{d} \frac{V}{v_x^2} \quad (1)$$

όπου, q το φορτίο των σωματιδίων, m η μάζα τους, V η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, d η μεταξύ τους απόσταση, l των μήκος των οπλισμών και v_x η ταχύτητα των σωματιδίων κατά τη διεύθυνση διάδοσης της δέσμης. Στη συνέχεια, η τιμή του μαγνητικού πεδίου B επιλεγόταν έτσι ώστε να επαναφέρει τη δέσμη στο κέντρο της οθόνης. Στην περίπτωση αυτή, το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης ισούται με το μέτρο της δύναμης λόγω του μαγνητικού πεδίου,

$$qE = qv_x B \quad (2)$$

από όπου, λύνοντας ως προς v_x , έχουμε

$$v_x = \frac{E}{B} = \frac{1}{B} \frac{V}{d}. \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας την ταχύτητα v_x από τη (3) στην (1) βρίσκουμε ότι,

$$\frac{q}{m} = \frac{V}{l dB^2} \tan \theta. \quad (4)$$

Όλα τα μεγέθη, V , B , l , d και θ είναι μετρήσιμα οπότε και μπορεί να βρεθεί ο λόγος φορτίο προς μάζα των σωματιδίων. Ο J.J. Thomson βρίσκει $q/m = 1.0 \times 10^{-11}$ Cb/kg (σημερινή αποδεκτή τιμή $1.7588 \dots \times 10^{-11}$ Cb/kg) και το συγκρίνει με τον αντίστοιχο λόγο $(q/m)_H \sim 1 \times 10^{-8}$ Cb/kg για τα ιόντα Υδρογόνου (πρωτόνια) που ήταν ήδη γνωστός από την ηλεκτρόλυση. Υποθέτοντας το ίδιο φορτίο και για τα δύο σωματίδια (σωματίδια καθοδικών ακτίνων και ιόντα Υδρογόνου), η σύγκριση μας λέει ότι τα ηλεκτρόνια (όπως ονομάστηκαν έκτοτε) είναι ~ 1000 φορές ελαφρύτερα. Επαναλαμβάνοντας το πείραμα για διάφορα μέταλλα καθόδου και διάφορα αέρια στην ηλεκτρική εκκένωση, βρίσκει τον ίδιο ακριβώς λόγο. Καταλήγει λοιπόν στα εξής συμπεράσματα:

- Τα ηλεκτρόνια είναι κοινά σε όλη την ύλη. Είναι τα ίδια σωματίδια που παράγονται μέσω του φωτοηλεκτρικού φαινομένου καθώς και από μερικά ραδιενεργά υλικά.
- Είναι υπεύθυνα για το ηλεκτρικό ρεύμα στα μεταλλικά σύρματα.
- Είναι συστατικά όλων των ατόμων και, ιδιαίτερα, αποτελούν το συστατικό που φέρει το αρνητικό φορτίο τους.
- Εφόσον τα άτομα είναι ηλεκτρικά ουδέτερα, θα πρέπει να περιέχουν και ίση ποσότητα θετικού φορτίου.
- Το θετικά φορτισμένο τμήμα του ατόμου πρέπει να συγκεντρώνει το σύνολο σχεδόν της μάζας του ατόμου διότι η μάζα των ατόμων (προσεγγιστικά γνωστή από τη Χημεία) είναι πολύ μεγαλύτερη αυτής των ηλεκτρονίων.

Το 1909 ο R. Millikan θα προσδιορίσει ξεχωριστά το φορτίο του ηλεκτρονίου, $q = -e$, με ένα ευφυές αλλά δύσκολο στη πραγματοποίησή του πείραμα, όπου φορτισμένες σταγόνες λαδιού κινούνται κατακόρυφα μεταξύ δύο οπλισμών ενός πυκνωτή. Στις σταγόνες επιδρούν η βαρυτική δύναμη, η ηλεκτρική δύναμη (από το πεδίο στο εσωτερικό του πυκνωτή) και μία δύναμη τριβής που είναι ανάλογη της ταχύτητάς τους και εξαρτάται από το σχήμα και το μέγεθός τους. Οι σταγόνες κινούνται με σταθερή ταχύτητα (ισορροπία δυνάμεων) είτε κατά την κάθοδο είτε κατά της άνοδο τους. Μετρώντας τις ταχύτητες ανόδου και καθόδου ο Millikan βρίσκει ότι $e = 1.69 \times 10^{-19}$ Cb ($\pm 1\%$) ενώ η σημερινή αποδεκτή τιμή είναι $e = 1.602 \times 10^{-19}$ Cb!

2.2 Τα πρώτα ατομικά μοντέλα: J.J. Thomson

Βασισμένος στα παραπάνω συμπεράσματα, ο J.J. Thomson πρότεινε το γνωστό μας σήμερα ατομικό μοντέλο του «σταφιδόψωμου» (Σχ. 5), σύμφωνα με το οποίο τα άτομα αποτελούνται από μια σφαιρική, ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου $+Ze$ στην οποία τα Z τον αριθμό ηλεκτρόνια είναι ομοιόμορφα ενσωματωμένα. Παρόλο που σήμερα φαίνεται απλοϊκό, το μοντέλο μπορεί να «μαθηματικοποιηθεί» και να κάνει

συγκεκριμένες προβλέψεις. Η κυριότερη αφορά τη σκέδαση από τα άτομα, μεγάλης μάζας, ταχέων και θετικά φορτισμένων σωματιδίων (όπως είναι π.χ. οι πυρήνες He^{++} /σωματίδια α). Το γεγονός ότι θα έχουν μεγάλη μάζα σημαίνει ότι η παρουσία των, πολύ μικρής μάζας, ηλεκτρονίων δεν θα γίνει καν αντιληπτή από αυτά (τα ηλεκτρόνια θα σκορπίσουν σαν μπαλάκια του πινγκ-πονγκ που τα χτυπάει μια νταλικά που κινείται γρήγορα). Συνεπώς, αρκεί να λάβουμε υπ' όψη μόνο την ηλεκτροστατική άπωση μεταξύ των σωματιδίων αυτών και του ομοιόμορφου, θετικού φορτίου των ατόμων. Από τον ηλεκτρισμό γνωρίζουμε ότι το ακτινικό δυναμικό μιας ομοιόμορφης σφαιρικής κατανομής φορτίου $+Ze$ και ακτίνας R γράφεται ως,

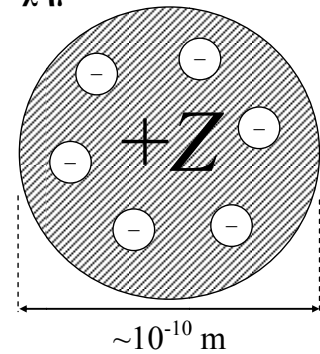
$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)}{2R^3} (3R^2 - r^2) & r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)}{r} & r \geq R \end{cases} \quad (5)$$

και, επακόλουθα, η δυναμική ενέργεια της αλληλεπίδρασης της κατανομής αυτής με τα σωματίδια α , φορτίου $+2e$, θα είναι $U(r) = 2e \cdot V(r)$, δηλαδή,

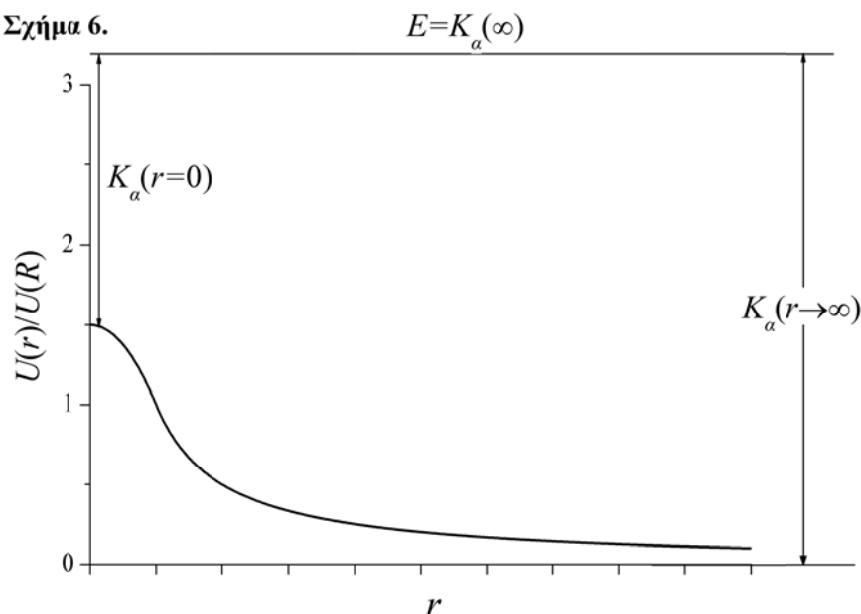
$$U(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{2R^3} (3R^2 - r^2) & r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} & r \geq R \end{cases} \quad (6)$$

Η δυναμική ενέργεια της (6) σχεδιάζεται στο Σχ. 6 (ως προς την τιμή της στην ακτίνα $r=R$). Η τυπική ακτίνα

Σχήμα 5.



Σχήμα 6.

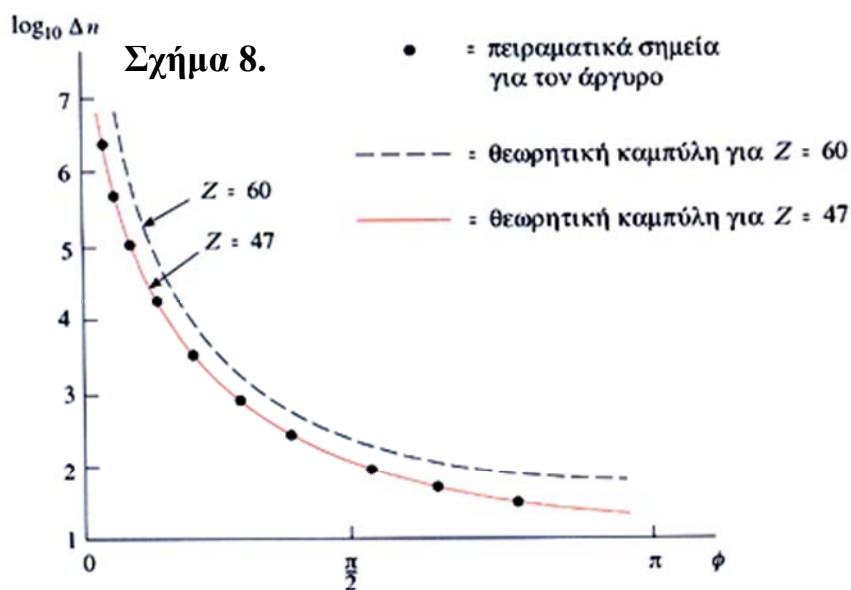
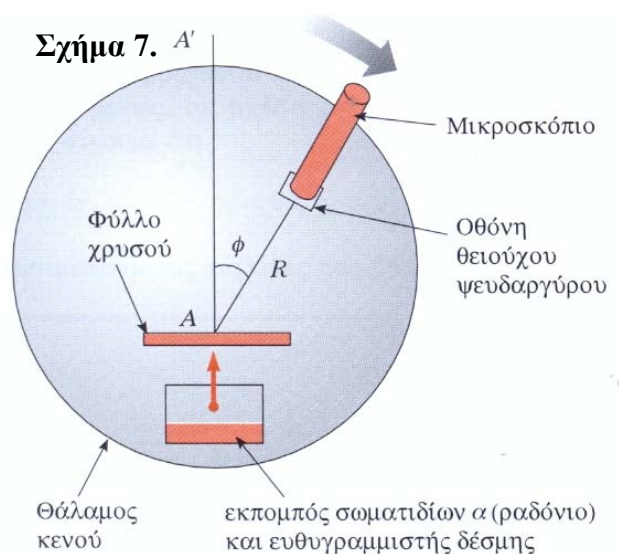


των ατόμων είναι $R \sim 10^{-10}$ m. Έστω τώρα ότι ένα σωματίδιο α με αρχική κινητική ενέργεια $K_\alpha(r \rightarrow \infty) \approx 7.7$ MeV (που παράγεται από το ραδιενεργό στοιχείο Ραδόνιο) πλησιάζει μετωπικά ένα άτομο, π.χ. Αργύρου ($Z=49$). Η αρχική αυτή κινητική ενέργεια θα είναι ίση με την ολική, $E = K + U$, μια και για $r \rightarrow \infty$ η δυναμική

ενέργεια τείνει στο μηδέν. Όσο όμως το σωματίδιο α πλησιάζει προς το άτομο η δυναμική ενέργεια αυξάνεται και συνεπώς η κινητική ενέργεια του σωματιδίου θα μειώνεται (ώστε η E να παραμένει σταθερή). Από την άλλη, όπως μπορείτε να υπολογίσετε και μόνοι σας¹, το μοντέλο του Thomson (σχέση (6) με $Z=49$ και $R \sim 10^{-10}$ m) προβλέπει ότι στο κέντρο του ατόμου ($r=0$) η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης $U(0)$ θα είναι μόλις ~ 230 eV. Συνεπώς, το σωματίδιο κυριολεκτικά θα διαπεράσει το άτομο πρακτικά ανεπηρέαστο. Γενικεύοντας και σε κρούσεις που δεν είναι μετωπικές, οι γωνίες σκέδασης θα είναι μικρές ($\sim 1^\circ$) ακόμη και μετά από πολλαπλή σκέδαση.

2.3 Τα πρώτα ατομικά μοντέλα: Rutherford

Το 1911 ο Rutherford και οι συνεργάτες του θα ελέγξουν πειραματικά τις προβλέψεις αυτές χρησιμοποιώντας τη διάταξη του Σχ. 7. Χρησιμοποίησαν πηγή Ραδονίου για την παραγωγή των σωματιδίων α κινητικής ενέργειας ~ 7.7 MeV και ως στόχο κυρίως φύλλα Χρυσού ($Z=79$). Στο πείραμα μετρήθηκε ο αριθμός των σωματιδίων α που σκεδάζονται ανά μονάδα χρόνου κατά γωνία ϕ ως προς την αρχική κατεύθυνση της δέσμης. Το Σχ. 8 δείχνει κάποια πειραματικά αποτελέσματα που αφορούν όμως τον Άργυρο. Είναι αξιοσημείωτο ότι σκέδαση παρατηρήθηκε και σε πολύ μεγάλες γωνίες, μέχρι και $\sim 160^\circ$. Συνεπώς, το μοντέλο του Thomson έπρεπε να είναι λανθασμένο.



¹ Υπενθυμίζεται ότι, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{Cb}^2$

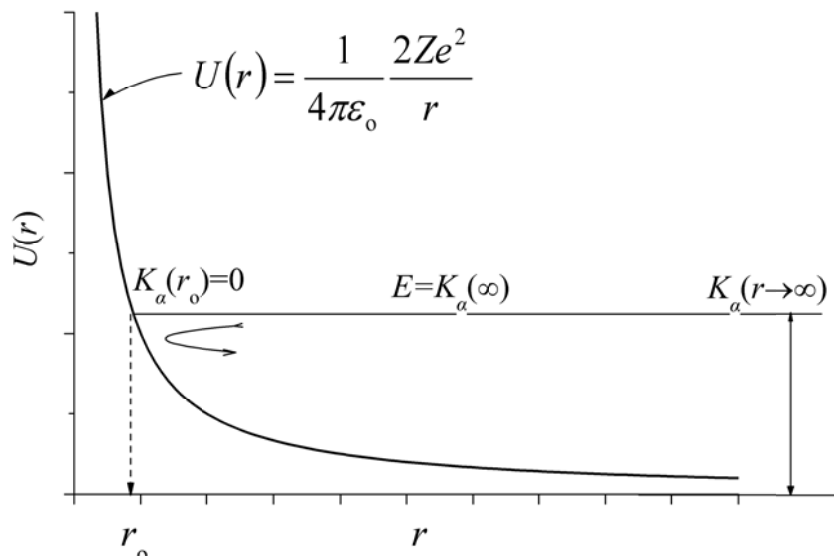
Για να εξηγήσει τα δεδομένα αυτά ο Rutherford έπρεπε να υποθέσει ότι η αρχική κινητική ενέργεια των σωματιδίων α δεν είναι παντού μεγαλύτερη από την $U(r)$. Συγκεκριμένα, δεν χρησιμοποίησε τη δυναμική ενέργεια (6) αλλά αυτή που αντιστοιχεί σε σημειακό θετικό φορτίο $+Ze$,

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r}. \quad (7)$$

Η (7) σχεδιάζεται στο Σχ. 9. Αν υποθέσουμε πάλι μετωπική κρούση, και σε αυτή την περίπτωση, εφόσον $U(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, η ολική ενέργεια $E = K + U$ θα ισούται με,

$$E = K_\alpha(r \rightarrow \infty) \quad (8)$$

Σχήμα 9.



Τώρα όμως, σε κάποιο σημείο r_0 , θα έχουμε $E = U(r_0)$, οπότε και $K_\alpha(r_0) = 0$. Το σωματίδιο α στο σημείο αυτό θα σταματήσει, θα αντιστρέψει την πορεία του και θα απομακρυνθεί επιταχυνόμενο. Για το σημείο αντιστροφής r_0 θα πρέπει λοιπόν να ισχύει,

$$E = K_\alpha(r \rightarrow \infty) = U(r_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_0} \quad (9)$$

συνεπώς,

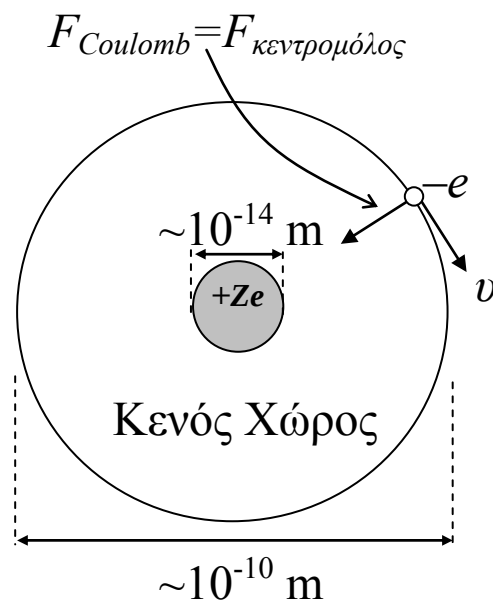
$$r_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{K_\alpha(r \rightarrow \infty)}. \quad (10)$$

Το σημείο αντιστροφής, μπορεί να θεωρηθεί ως η τυπική ακτίνα μιας σφαίρας όπου είναι συγκεντρωμένο το θετικό φορτίο του ατόμου. Π.χ. για $Z=49$ (Αργυρός) και $K_\alpha=7.7$ MeV βρίσκουμε ότι $r_0 \approx 1.8 \cdot 10^{-14}$ m, δηλαδή περίπου 10000 φορές μικρότερη από την ακτίνα του ατόμου. Εάν, τέλος, δεν περιοριστούμε στη μετωπική κρούση, τότε παράγεται η σχέση,

$$\frac{dn}{dt} \propto \frac{Z^2}{K_\alpha^2(r \rightarrow \infty) \sin^4(\varphi/2)} \quad (11)$$

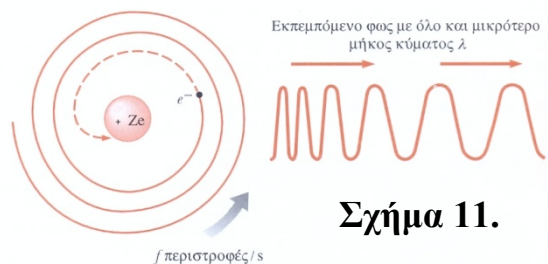
που δίνει το ρυθμό ανίχνευσης σωματιδίων α ως συνάρτηση της γωνίας σκέδασης. Όπως βλέπουμε και στο Σχ. 8 η (11) περιγράφει πολύ καλά τα πειραματικά δεδομένα.

Με αυτή τη νέα εικόνα ως αφετηρία, ο Rutherford προτείνει ένα πιο βελτιωμένο «πλανητικό» μοντέλο για το άτομο (Σχ. 10) σύμφωνα με το οποίο το θετικά φορτισμένο τμήμα του (ο πυρήνας) είναι στο κέντρο και τα ηλεκτρόνια περιστρέφονται γύρω του όπως οι πλανήτες γύρω από τον Ήλιο. Η ελκτική δύναμη που τα συγκρατεί και τα εξαναγκάζει σε κυκλική τροχιά είναι η ηλεκτρική (Coulomb) που δρα ως κεντρομόλος. Το μοντέλο άφηne αναπάντητα ερωτήματα όσον αφορά τη σύσταση και σταθερότητα του πυρήνα. Π.χ. εάν στον πυρήνα υπάρχουν μόνο θετικά φορτία, πως συγκρατούνται σε αυτόν; (ένδειξη ύπαρξης δύναμης πολύ ισχυρότερης της ηλεκτρικής) και, επίσης, τι είναι η άλλη μισή (και πλέον) μάζα των πυρήνων; Τα ερωτήματα αυτά θα απαντηθούν με την ανακάλυψη του νετρονίου και της ισχυρής πυρηνικής δύναμης. Αλλά και όσον αφορά το



Σχήμα 10.

άτομο, το μοντέλο έχει χτυπητές αδυναμίες, με κυριότερες τις εξής: Η κυκλική κίνηση των ηλεκτρονίων είναι επιταχυνόμενη (κεντρομόλος) και, επακόλουθα θα εκπέμπει Η/Μ ακτινοβολία συχνότητας ίσης με τη συχνότητα περιφοράς του (γεγονός που προβλέπεται από τις εξισώσεις του Maxwell και είναι επιβεβαιωμένο πειραματικά ήδη από το 1888). Ως αποτέλεσμα της εκπομπής, χάνει ενέργεια με συνέπεια τη σταδιακή μείωση της ακτίνας του, οπότε τελικά θα χάσει όλη την ενέργειά του και θα πέσει στον πυρήνα (αυτοκαταστροφή της ύλης). Αντίθετα, τα άτομα είναι αποδεδειγμένα πολύ σταθερές δομές. Πέραν αυτού, η σταδιακή μείωση της ακτίνας συνεπάγεται και τη σταδιακή αύξηση της συχνότητας περιφοράς και εκπομπής. Αυτό σημαίνει ότι θα εκπέμπει συνεχώς και πρακτικά όλες τις συχνότητες (Σχ. 11). Το φάσμα της εκπεμπόμενης Η/Μ ακτινοβολίας, θα πρέπει δηλαδή να είναι *συνεχές*. Η πρόβλεψη αυτή έρχεται σε πλήρη αντίθεση με τα τότε πειραματικά δεδομένα τα οποία θα παρουσιάσουμε συνοπτικά παρακάτω.



Σχήμα 11.

3. Τα Γραμμικά Φάσματα των Ατομικών Αερίων

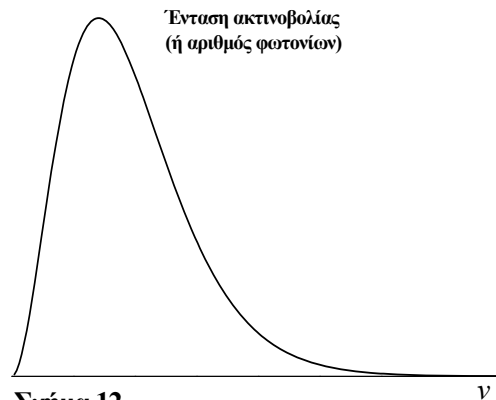
3.1 Συνεχή και Γραμμικά Φάσματα Απορρόφησης & Εκπομπής

Η γνωστότερη φωτεινή πηγή που εκπέμπει συνεχές φάσμα θεωρείται ότι είναι ο Ήλιος. Όταν μετά τη βροχή το ηλιακό φως περνά από τις σταγόνες που βρίσκονται στην ατμόσφαιρα, *αναλύεται* σε μια συνεχή ταινία χρωμάτων (ουράνιο τόξο) λόγω του φαινομένου του διασκεδασμού (δείκτης διάθλασης που εξαρτάται από το μήκος κύματος). Στο εργαστήριο, για την ανάλυση του φωτός χρησιμοποιούμε σήμερα φασματοσκό-

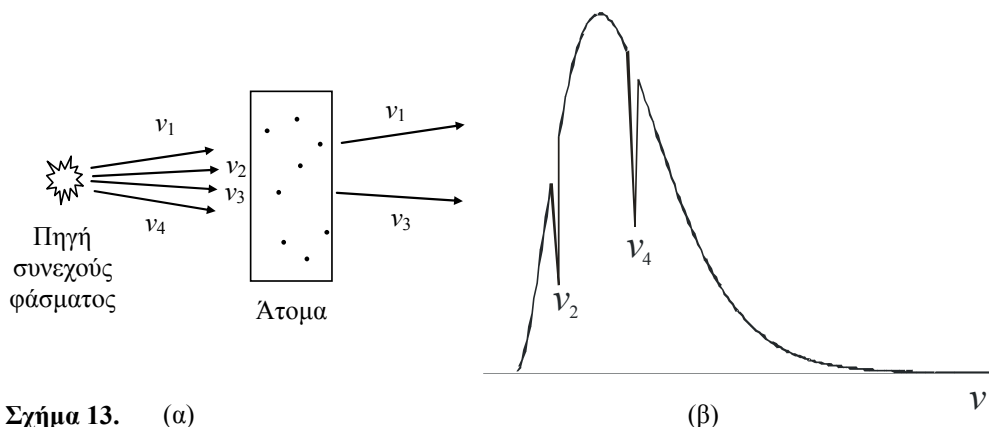
πια. Η ένταση (ή αριθμός φωτονίων ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας) για κάθε χρώμα είναι βέβαια διαφορετική. Εάν σχεδιάσουμε σε ένα διάγραμμα την φωτεινή ένταση ως συνάρτηση της συχνότητας θα έχουμε το *συνεχές φάσμα* του Ήλιου (Σχ. 12). Εκτός από τον Ήλιο, συνεχή φάσματα (μέλαν σώμα) εκπέμπουν και π.χ. οι λάμπες πυράκτωσης και γενικότερα όλα τα διάλυρα στερεά.

Με τα άτομα στην αέρια φάση τα πράγματα είναι διαφορετικά. Διακρίνουμε, καταρχήν, δύο κύρια είδη φασματοσκοπίας, τη φασματοσκοπία απορρόφησης και τη φασματοσκοπία εκπομπής. Κατά την πρώτη, το συνεχές φάσμα μιας πηγής περνά μέσα από κάποιο θάλαμο που περιέχει το προς μελέτη άτομο. Το φάσμα που εξέρχεται του θαλάμου είναι ίδιο με αυτό της πηγής, εκτός από κάποιες φασματικές περιοχές όπου η ένταση έχει μειωθεί επειδή το αέριο απορρόφησε επιλεκτικά φως στις περιοχές αυτές (Σχ. 13).

Από την άλλη, κατά την φασματοσκοπία εκπομπής δημιουργούμε μία εκκένωση στο θάλαμο όπου βρίσκεται το αέριο (π.χ. λάμπες Neon), οπότε τα άτομα διεγείρονται. Στη συνέχεια, τα άτομα αυτά αποδιεγείρονται, εκπέμποντας φως το οποίο αναλύουμε με ένα φασματοσκόπιο (Σχ. 14). Το κύριο χαρακτηριστικό των



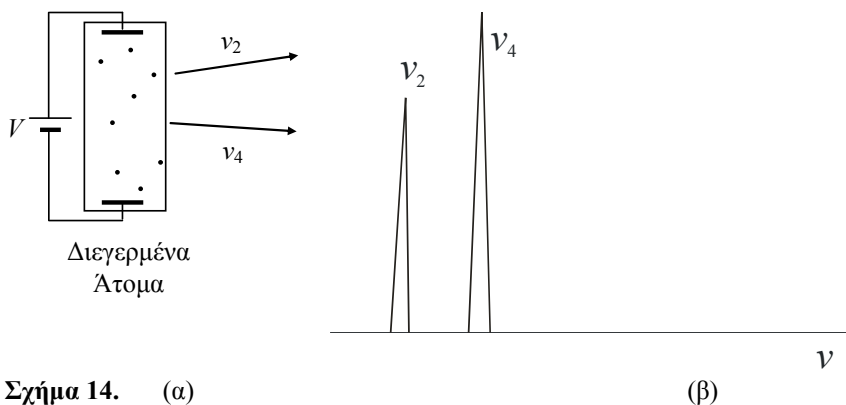
Σχήμα 12.



Σχήμα 13. (α)

(β)

φασμάτων των αερίων είναι ότι, είτε οι σκοτεινές φασματικές περιοχές σε φωτεινό υπόβαθρο (φάσματα απορρόφησης) είτε οι φωτεινές φασματικές περιοχές σε σκοτεινό υπόβαθρο (φάσματα εκπομπής) είναι πολύ στενές και ονομάζονται **φασματικές γραμμές** και τα φάσματά τους **γραμμικά**. Ήδη από τον 19^{ου} αιώνα είχε παρατηρηθεί ότι οι συχνότητες (ή μήκη κύματος) απορρόφησης



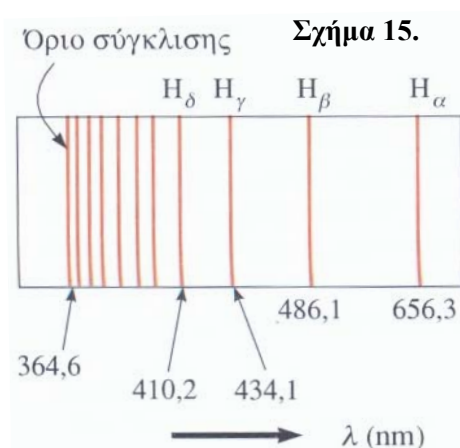
Σχήμα 14. (α)

(β)

και εκπομπής του ιδίου αερίου συμπίπτουν (αν και τα φάσματα δεν ταυτίζονται αναγκαστικά). Επίσης είχε παρατηρηθεί ότι τα γραμμικά φάσματα του κάθε στοιχείου το χαρακτηρίζουν. Είναι το “δακτυλικό του αποτύπωμα” και δεν υπάρχουν στη Φύση δύο στοιχεία με τα ίδια γραμμικά φάσματα. Μερικά μάλιστα στοιχεία, όπως το Rb και το Cs, ανακαλύφθηκαν μέσω της μελέτης των φασμάτων τους. Σήμερα η φασματοσκοπία έχει πολλές εφαρμογές όπως είναι π.χ. τη στοιχειακή ανάλυση αστερών και άλλων δειγμάτων (π.χ. τροφίμων). Κλείνουμε αυτή την αναφορά μας στον διαχωρισμό των φασμάτων με την παρατήρηση ότι ακόμα και το φάσμα του Ήλιου είναι τελικά γραμμικό. Αυτό διαπιστώθηκε για πρώτη φορά το 1814 από το Fraunhofer, που ανακάλυψε την ύπαρξη ~1000 σκοτεινών γραμμών. Ο Kirchhoff, σωστά τις απέδωσε στην απορρόφηση από άτομα (όπως το Na) που βρίσκονται στα εξωτερικά στρώματα του Ήλιου.

3.2 Γραμμικά Φάσματα του Υδρογόνου

Το 1885 ο Balmer αναλύει τις τότε γνωστές τέσσερις φασματικές γραμμές του ορατού φάσματος του Υδρογόνου και ανακαλύπτει μια εμπειρική σχέση που αναπαράγει πιστά τις φασματικές θέσεις τόσο αυτών όσο και ακόμη δέκα γραμμών που είχαν ανακαλυφθεί εν τω μεταξύ (Σχ. 15). Προτείνει επίσης την επέκταση της σχέσης του για την πρόβλεψη και άλλων σειρών από φασματικές γραμμές σε διάφορες περιοχές μηκών κύματος (μακρινό υπεριώδες, υπέρυθρο κλπ). Οι σειρές αυτές θα παρατηρηθούν πράγματι και θα αποτελέσουν, μαζί με την εμπειρική σχέση του Balmer, το ελάχιστο πειραματικό δεδομένο που θα πρέπει οπωσδήποτε να αναπαράγει κάθε μελλοντική ατομική θεωρία ώστε να θεωρείται άξια λόγου. Είναι προφανές ότι το πλανητικό μοντέλο του Rutherford δεν μπορεί να αναπαράγει ούτε το φάσμα του απλούστερου στοιχείου (Υδρογόνου) ούτε κανενός άλλου, εφόσον, όπως είπαμε και παραπάνω, προβλέπει συνεχές και όχι γραμμικό φάσμα εκπομπής. Από το μοντέλο αυτό αξίζει να κρατήσουμε τις σχέσεις (10) και (11) για τη σκέδαση θετικά φορτισμένων σωματιδίων σε ένα δυναμικό Coulomb και το ότι η μάζα του ατόμου είναι συγκεντρωμένη στον πυρήνα του.



4. Σύνοψη

Την ίδια εποχή που αναδύονται οι σωματιδιακές ιδιότητες του φωτός, σειρά πειραματικών δεδομένων πείθει ότι η ύλη αποτελείται από σωματίδια (μόρια, άτομα, πρωτόνια, ηλεκτρόνια). Σε ατομικό επίπεδο όμως τα μοντέλα του ατόμου που βασίζονται στην Κλασική Φυσική και τη σωματιδιακή φύση της ύλης αδυνατούν να εξηγήσουν κυρίως τα γραμμικά φάσματα των αερίων. Η πρώτη σχετικά επιτυχής προσπάθεια θα γίνει από τον N. Bohr του οποίου το ατομικό μοντέλο (με πολλές αξιωματικές παραδοχές που ήταν απαράδεκτες στα πλαίσια της Κλασικής Φυσικής) θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

K2. Ασκήσεις/Προβλήματα

Rutherford - J. J. Thomson

1. Σύμφωνα με το ατομικό μοντέλο του Thomson η δυναμική ενέργεια του συστήματος (σωματίδιο a - θετικά φορτισμένο τμήμα του ατόμου) γράφεται ως

$$U(r) = \begin{cases} k \frac{2Ze^2}{2R^3} (3R^2 - r^2) & r \leq R \\ k \frac{2Ze^2}{r} & r \geq R \end{cases}$$

όπου εδώ R θεωρούμε ότι είναι η ακτίνα του ατόμου ($\sim 5 \times 10^{-11}$ m). Υποθέστε μετωπική κρούση και ότι η ενέργεια του σωματιδίου a είναι 7.7 MeV. Βρείτε την κινητική ενέργεια του σωματιδίου καθώς διαπερνά το άτομο και ειδικά όταν αυτό βρίσκεται στο κέντρο του ατόμου ($r=0$).

2. Θεωρώντας ομοιόμορφη κατανομή φορτίου στον πυρήνα του ατόμου, η δυναμική ενέργεια του συστήματος (σωματίδιο a - πυρήνας) γράφεται ως

$$U(r) = \begin{cases} k \frac{2Ze^2}{2R^3} (3R^2 - r^2) & r \leq R \\ k \frac{2Ze^2}{r} & r \geq R \end{cases}$$

όπου R είναι η ακτίνα του πυρήνα ($\sim 1 \times 10^{-14}$ m). Εάν η κινητική ενέργεια του σωματιδίου γίνει ίση ή ξεπεράσει την $U(0)$ η σκέδαση παύει να περιγράφεται από το μοντέλο του Rutherford (που υποθέτει $U(r) = k2Ze^2/r$ για κάθε r). Ποια είναι αυτή η κινητική ενέργεια για έναν πυρήνα με $Z=13$;

3. Θεωρώντας ομοιόμορφη κατανομή φορτίου στον πυρήνα του ατόμου, η δυναμική ενέργεια του συστήματος (σωματίδιο a - πυρήνας) γράφεται ως

$$U(r) = \begin{cases} k \frac{2Ze^2}{2R^3} (3R^2 - r^2) & r \leq R \\ k \frac{2Ze^2}{r} & r \geq R \end{cases}$$

όπου R η ακτίνα του πυρήνα. Εάν η κινητική ενέργεια του σωματιδίου γίνει ίση ή ξεπεράσει την $U(0)$ η σκέδαση παύει να περιγράφεται από το μοντέλο του Rutherford (που υποθέτει $U(r) = k2Ze^2/r$ για κάθε r). Βρέθηκε ότι για έναν πυρήνα με $Z=29$ η ελάχιστη ενέργεια όπου συμβαίνει αυτό είναι ίση με 13.9 MeV. Ποια η πυρηνική ακτίνα;

Κ3. Η Κυματική Φύση της Ύλης

1. Ο Κυματοσωματιδιακός Δυϊσμός & η Υπόθεση de Broglie

Όπως είπαμε και προηγουμένως, τα φαινόμενα που εξετάσαμε μέχρι τώρα (μέλαν σώμα, φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, σκέδαση Compton και το συμβολόμετρο του Young με φωτόνια) οδήγησαν στα συμπεράσματα ότι (i) τα φωτόνια ανιχνεύονται ως σωματίδια, δηλαδή αλληλεπιδρούν ως μονάδες με την ύλη (π.χ. φωτο-ανιχνευτές) και (ii) εμφανίζουν και κυματική φύση εφόσον παράγουν καθαρά κυματικά φαινόμενα, όπως η συμβολή και η περίθλαση, ειδικά όταν ο αριθμός τους είναι πολύ μεγάλος (μακροσκοπικός). Αυτός είναι ένα τρόπος να διατυπώσει κανείς την **αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού** (wave-particle duality principle). Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι διαδικασίες αλληλεπίδρασης ύλης-ακτινοβολίας στο μικρόκοσμο μας προτρέπουν να υιοθετήσουμε μια πιο ευέλικτη και ευμετάβλητη «εικόνα» για το φως, όπου τόσο η κυματική όσο και η σωματιδιακή φύση του είναι απαραίτητες και συμπληρωματικές. Μάλιστα, το 1923 ο L de Broglie προχώρησε ένα βήμα παραπέρα και έγραψε: *«Εφόσον τα φωτόνια εμφανίζουν τόσο κυματικά όσο και σωματιδιακά χαρακτηριστικά, ίσως όλες οι μορφές της ύλης έχουν, εκτός από σωματιδιακές, και κυματικές ιδιότητες»*. Η υπόθεση de Broglie επεκτείνει λοιπόν την αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού σε όλα τα σωματίδια και δεν την περιορίζει μόνο στα φωτόνια (με τη διαφορά ότι τα σωματίδια έχουν μάζα ηρεμίας, σε αντίθεση με τα φωτόνια). Η επέκταση αυτή συνεπάγεται ότι οι σχέσεις,

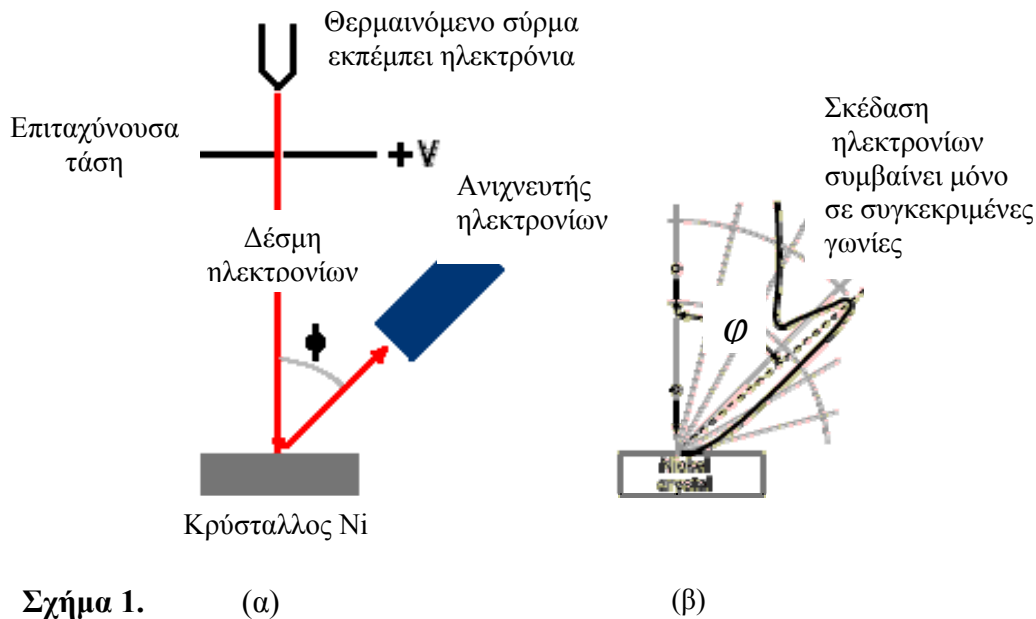
$$E=hf=\hbar\omega \quad (1\alpha)$$

$$p=h/\lambda=\hbar k \quad (1\beta)$$

ισχύουν για όλα τα σωματίδια και συνδέουν την (εντοπισμένη) ενέργεια και ορμή κάθε σωματιδίου με τα καθαρά κυματικά χαρακτηριστικά συχνότητα και μήκος κύματος. Έκτοτε, υιοθετήθηκε η ιδέα ότι κάθε σωματίδιο συνδέεται με ένα κύμα. Όχι όμως ένα H/M κύμα, που αφορά μόνο τα φωτόνια, αλλά ένα *κύμα ύλης*, όπως ονομάστηκε. Όπως και τα μηχανικά κύματα (που έχουν ανάγκη μέσου διάδοσης) καθώς και τα H/M κύματα, τα κύματα ύλης περιγράφονται από μία συνάρτηση, την λεγόμενη *κυματοσυνάρτηση* για την οποία θα μιλήσουμε αργότερα.

2. Παράδειγμα Κυματικής Συμπεριφοράς Σωματιδίων: Περίθλαση Ηλεκτρονίων

Εντυπωσιάζει το γεγονός ότι ο de Broglie διατύπωσε την υπόθεση χωρίς να υπάρχουν τη στιγμή εκείνη πειραματικά δεδομένα που να τη στηρίζουν. Για να επαληθευτεί η υπόθεση έπρεπε να παρατηρηθούν καθαρά κυματικά φαινόμενα χρησιμοποιώντας όμως σωματίδια αντί για φως. Η υπόθεση επαληθεύτηκε για πρώτη φορά από τα δεδομένα του πειράματος Davisson-Germer οι οποίοι (μάλλον τυχαία) πρόσεξαν ότι όταν ηλεκτρόνια προσπέσουν σ' έναν κρύσταλλο Ni παρατηρείται περίθλαση Bragg. Σχηματικό διάγραμμα της διάταξης φαίνεται στο Σχ. 1(α) και τα πειραματικά δεδομένα στο Σχ. 1(β). Ηλεκτρόνια πρακτικά

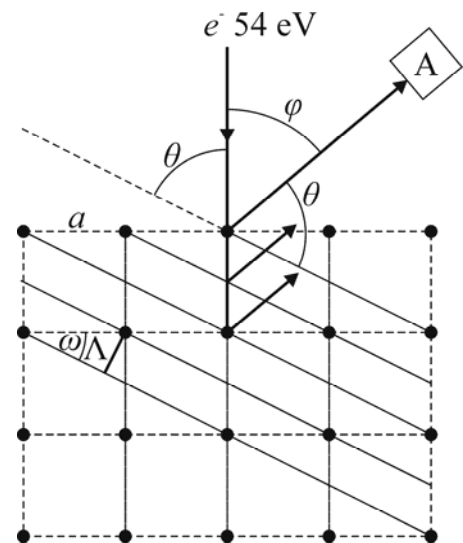


Σχήμα 1.

(α)

(β)

μηδενικής κινητικής ενέργειας παράγονται από ένα θερμαινόμενο σύρμα (θερμοηλεκτρικό φαινόμενο) και επιταχύνονται μέσω της τάσης V που εφαρμόζεται σε ένα ηλεκτρόδιο. Η κινητική ενέργειά τους μετά το ηλεκτρόδιο είναι ίση με eV . Η δέσμη ηλεκτρονίων προσπίπτει στη συνέχεια σε ένα κρύσταλλο Ni και σκεδάζεται. Στο πείραμα μετριέται ο αριθμός (ρεύμα) των ηλεκτρονίων ως συνάρτηση της γωνίας φ . Παρατηρείται ότι, εκτός από το κύριο μέγιστο ($\varphi=0$) υπάρχουν και άλλα, αλλά σε συγκεκριμένες μόνο γωνίες. Το Σχ. 2 σε συνδυασμό με την υπόθεση de Broglie δίνει την εξήγηση του φαινομένου. Το σχήμα είναι ολόιδιο με αυτό που συναντήσαμε στο παράρτημα Π1 όπου αναφερθήκαμε στην περίθλαση Bragg. Η μετρούμενη γωνία φ συνδέεται με τη γωνία Bragg μέσω της σχέσης $2\theta + \varphi = 180^\circ$. Ακόμη, από πειράματα ακτίνων X (φως) ήταν ήδη γνωστό ότι η πλευρά a του κρυστάλλου είναι ίση με $a=0.215 \text{ nm}$ και ότι η γωνία $\omega=25^\circ$. Συνεπώς, η απόσταση μεταξύ διαδοχικών ανακλαστικών επιπέδων, είναι $\Lambda = a \sin \omega = 0.091 \text{ nm}$. Οι Davisson και Germer βρήκαν πειραματικά ότι, για ηλεκτρόνια κινητικής ενέργειας 54 eVolts ($1 \text{ eVolt} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$), το πρώτο μέγιστο περίθλασης ($n=1$) εμφανίζεται στη γωνία $\varphi=50^\circ$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας τον νόμο του Bragg ($2\Lambda \sin \theta_n = n\lambda$), βρίσκουμε για τις παραπάνω συνθήκες το μήκος κύματος de Broglie ίσο με $\lambda=0.165 \text{ nm}$. Συμφωνεί αυτό το πειραματικό δεδομένο με την υπόθεση de Broglie; Η απάντηση είναι ναι. Συγκεκριμένα, η κινητική ενέργεια $K(=E)$ των (μη-σχετικιστικών) ηλεκτρονίων γράφεται,



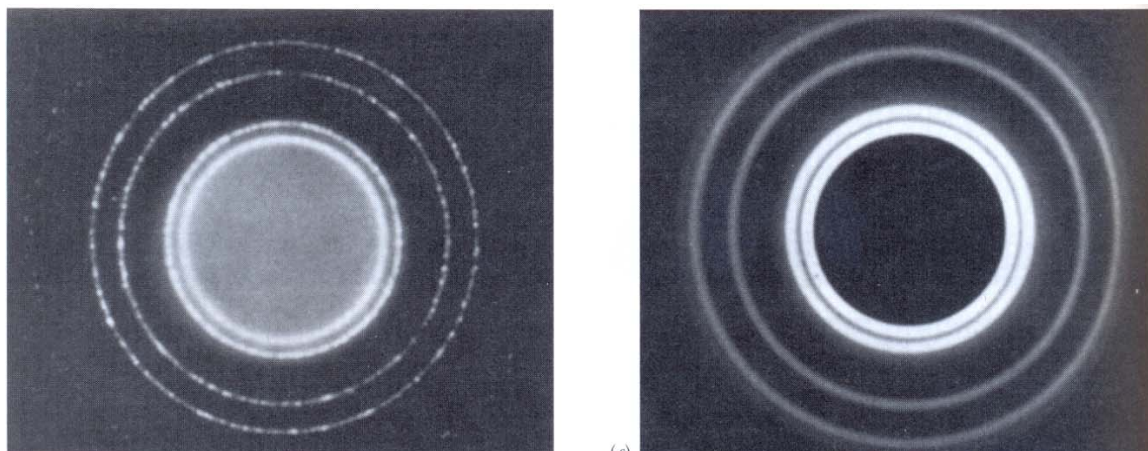
Σχήμα 2.

$$K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{p_e^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e \lambda^2} \quad (2)$$

οπότε λύνοντας ως προς λ , έχουμε,

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e K}} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών και της κινητικής ενέργειας που αναφέρθηκε παραπάνω βρίσκουμε



Σχήμα 3. Ακτίνες X

Ηλεκτρόνια
~ίδιου μήκους κύματος

ότι $\lambda=0.167$ nm! Οι Davisson και Germer επανέλαβαν το πείραμα *βάλλοντας με ένα ηλεκτρόνιο τη φορά* (όπως και στο πείραμα συμβολής του Young με φωτόνια) και κατέγραψαν τα ίδια αποτελέσματα. Έκτοτε, παρατηρήθηκε περίθλαση ή συμβολή και με νετρόνια, άτομα He και μόρια C₆₀. Για τον χαρακτηρισμό υλικών και βιολογικών μορίων, η περίθλαση Bragg χρησιμοποιείται πλέον τόσο με ακτίνες X όσο και με ηλεκτρόνια μια και, *εάν προσπέσουν επί του ίδιου στόχου και έχουν το ίδιο μήκος κύματος, παράγουν τον ίδιο σχηματισμό περίθλασης* (Σχ. 3).

3. Το Μοντέλο του Bohr για το Άτομο του Υδρογόνου μέσω της Υπόθεσης de Broglie

Η πρώτη αξιόλογη θεωρητική μελέτη του ατόμου του Υδρογόνου ανήκει στο N Bohr που ξεπέρασε τα προβλήματα του μοντέλου του Rutherford αξιοποιώντας τις ιδέες των Planck και Einstein για τα φωτόνια και κάνοντας κάποιες αξιωματικές (χωρίς απόδειξη ή αιτιολόγηση) παραδοχές. Συγκεκριμένα, αποδέχθηκε κατ' αρχήν, όπως και ο Rutherford, ότι οι τροχιές του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα είναι κυκλικές και ότι η δύναμη Coulomb δρα ως κεντρομόλος. Στη συνέχεια όμως, δέχθηκε αξιωματικά ότι υπάρχουν μόνο επιτρεπτές τροχιές στις οποίες το ηλεκτρόνιο δεν εκπέμπει H/M ακτινοβολία και δεν χάνει ενέργεια (η πρόταση αυτή έρχεται σε πλήρη αντίθεση με την Κλασική Φυσική). Η συχνότητα της ακτινοβολίας που εκπέμπει ή απορροφά το άτομο λοιπόν δε σχετίζεται με τη συχνότητα περιφοράς του. Αντί γι' αυτό, πρότεινε ότι το άτομο απορροφά ή εκπέμπει *φωτόνια* μόνο κατά τη **μετάβαση** από μία επιτρεπτή τροχιά σε μια άλλη (τα λεγόμενα κβαντικά άλματα). Η ενέργεια (συχνότητα) του φωτονίου που απορροφάται ή εκπέμπεται δίδεται από τη σχέση,

$$h\nu_{if} = |E_f - E_i| \quad (4)$$

όπου E_f και E_i είναι, αντίστοιχα, η μηχανική ενέργεια της τροχιάς στην οποία το ηλεκτρόνιο κατέληξε (τελική κατάσταση – final state) και της τροχιάς στην οποία βρισκόταν πριν από τη μετάβαση (αρχική κατάσταση – initial state). Αποδεχόμενος τα παραπάνω, αυτό που απέμενε ήταν η εύρεση αυτών των τροχιών (καταστά-

σεων) και οι μηχανικές ενέργειες που τους αντιστοιχούν. Για να το επιτύχει αυτό ο Bohr έκανε ακόμη μία ανεξήγητη στην εποχή του παραδοχή, ότι δηλαδή η στροφορμή του ηλεκτρονίου δεν μπορεί να πάρει συνεχείς αλλά μόνο κάποιες διάκριτες τιμές (;!). Εδώ θα προτιμήσουμε να «αποδείξουμε» αυτή τη **συνθήκη κβάντωσης μέσω της υπόθεσης de Broglie**. Η «απόδειξη» αυτή είναι ιστορικά μεταγενέστερη του μοντέλου του Bohr αλλά παρ' όλα αυτά θα την προτιμήσουμε γιατί αναδεικνύει και πάλι την κυματική συμπεριφορά των ηλεκτρονίων. Στο σημείο αυτό καλό θα είναι να συμβουλευτούμε την παράγραφο του παραρτήματος Π1 για τα στάσιμα κύματα. Εκεί αναφέρεται ότι σε μια χορδή κιθάρας στερεωμένη σε ακλόνητα άκρα, όπως και να τη διεγείρουμε αρχικά, θα επιβιώσουν μόνο εκείνα τα στάσιμα κύματα που αντιστοιχούν σε δεσμούς στα άκρα και μήκος χορδής ίσο με ακέραιο αριθμό ημικυμάτων ($\lambda/2$). Κατ' αντιστοιχία, ο de Broglie πρότεινε ότι όποιες και εάν είναι οι αρχικές συνθήκες εκκίνησης της περιφοράς του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα θα επιβιώσουν μόνο εκείνες οι τροχιές των οποίων οι περιφέρειες αντιστοιχούν σε ακέραιο αριθμό μηκών κύματος των κυμάτων ύλης (Σχ. 4). Θα έχουμε δηλαδή ότι,

$$2\pi r_n = n\lambda_n, \quad n=1,2,3,\dots \quad (5)$$

όπου r_n οι ακτίνες των τροχιών και λ_n τα μήκη κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου στις επιτρεπτές τροχιές. Το κάθε λ_n μπορεί να συνδεθεί με την ορμή του ηλεκτρονίου εφόσον,

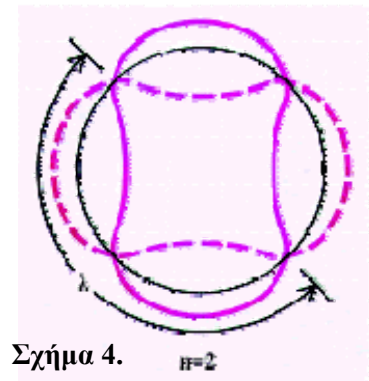
$$p = m_e v = h/\lambda. \quad (6)$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε ότι

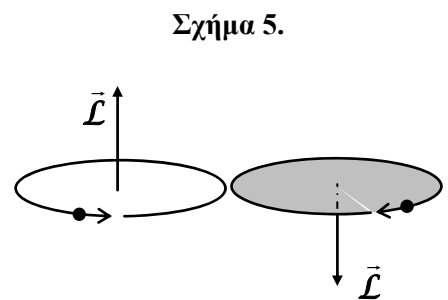
$$m_e \cdot v_n \cdot r_n = n \frac{h}{2\pi} = n \cdot \hbar, \quad n = 1,2,3,\dots \quad (7)$$

Το μέγεθος $\mathcal{L} = m_e \cdot v \cdot r$ είναι πράγματι το μέτρο της (τροχιακής, όπως λέγεται) στροφορμής του ηλεκτρονίου. Υπενθυμίζουμε ότι, όπως γνωρίζουμε και από το Λύκειο, η τροχιακή στροφορμή είναι ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{\mathcal{L}}$, μέτρου $\mathcal{L}$, διεύθυνσης κάθετης στο επίπεδο της τροχιάς και κατεύθυνσης που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η διεύθυνση και φορά του διανύσματος αυτού λοιπόν μας δίνει πληροφορίες τόσο για το επίπεδο της τροχιάς όσο και για τη φορά περιστροφής του σωματιδίου (Σχ. 5). Τώρα, με τη βοήθεια της (7) μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό των τροχιών. Το μέτρο της δύναμης Coulomb μεταξύ του πυρήνα, φορτίου $+e$, και του ηλεκτρονίου ($-e$) (Σχ. 10 του Κ2) γράφεται ως $k e^2 / r^2$ με $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{Cb}^2$. Εφόσον η δύναμη αυτή δρα ως κεντρομόλος θα πρέπει είναι ίση με $m_e a_k = m_e v^2 / r$ όπου $a_k = v^2 / r$ η κεντρομόλος επιτάχυνση. Άρα,

$$k \frac{e^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r} \quad (8)$$



Σχήμα 4.



Σχήμα 5.

από όπου έχουμε μία σχέση μεταξύ ταχύτητας και ακτίνας. Μας χρειάζεται άλλη μία σχέση μεταξύ των δύο αυτών μεγεθών (σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους) που δεν είναι άλλη από τη συνθήκη κβάντωσης (7). Συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις βρίσκουμε ότι οι επιτρεπτές ακτίνες γράφονται ως,

$$r_n = a_0 n^2 \quad (9)$$

όπου,

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k e^2} = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (10)$$

η λεγόμενη **ακτίνα του Bohr** που ακόμη και σήμερα χρησιμοποιείται ως ατομική μονάδα μέτρησης μήκους. Οι δε ταχύτητες του ηλεκτρονίου στις επιτρεπτές τροχιές γράφονται,

$$v_n = \frac{\hbar}{m_e r_n} n = \frac{\hbar}{m_e a_0} \frac{1}{n}. \quad (11)$$

Με τις ταχύτητες και ακτίνες γνωστές, μπορούμε να βρούμε την κινητική και δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου σε κάθε τροχιά. Η κινητική ενέργεια, μέσω της (8) γράφεται

$$K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} k \frac{e^2}{r} \quad (12)$$

και η δυναμική (φορτίο ηλεκτρονίου επί δυναμικό Coulomb),

$$U = -eV = -k \frac{e^2}{r} \quad (13)$$

Συνεπώς η μηχανική ενέργεια $E=U+K$ γράφεται

$$E = -\frac{1}{2} k \frac{e^2}{r} \quad (14)$$

Προσέξτε ότι από τις σχέσεις (12) - (14) έχουμε ότι

$$U = -2K \quad \text{και} \quad E = -K. \quad (15)$$

Οι σχέσεις (15), σε λίγο διαφορετική μορφή, θα επιβιώσουν και στην αυστηρή (Κβαντομηχανική) περιγραφή του ατόμου του Υδρογόνου. Προς το παρόν, χρησιμοποιώντας την (9) μπορούμε να βρούμε την ενέργεια κάθε κατάστασης,

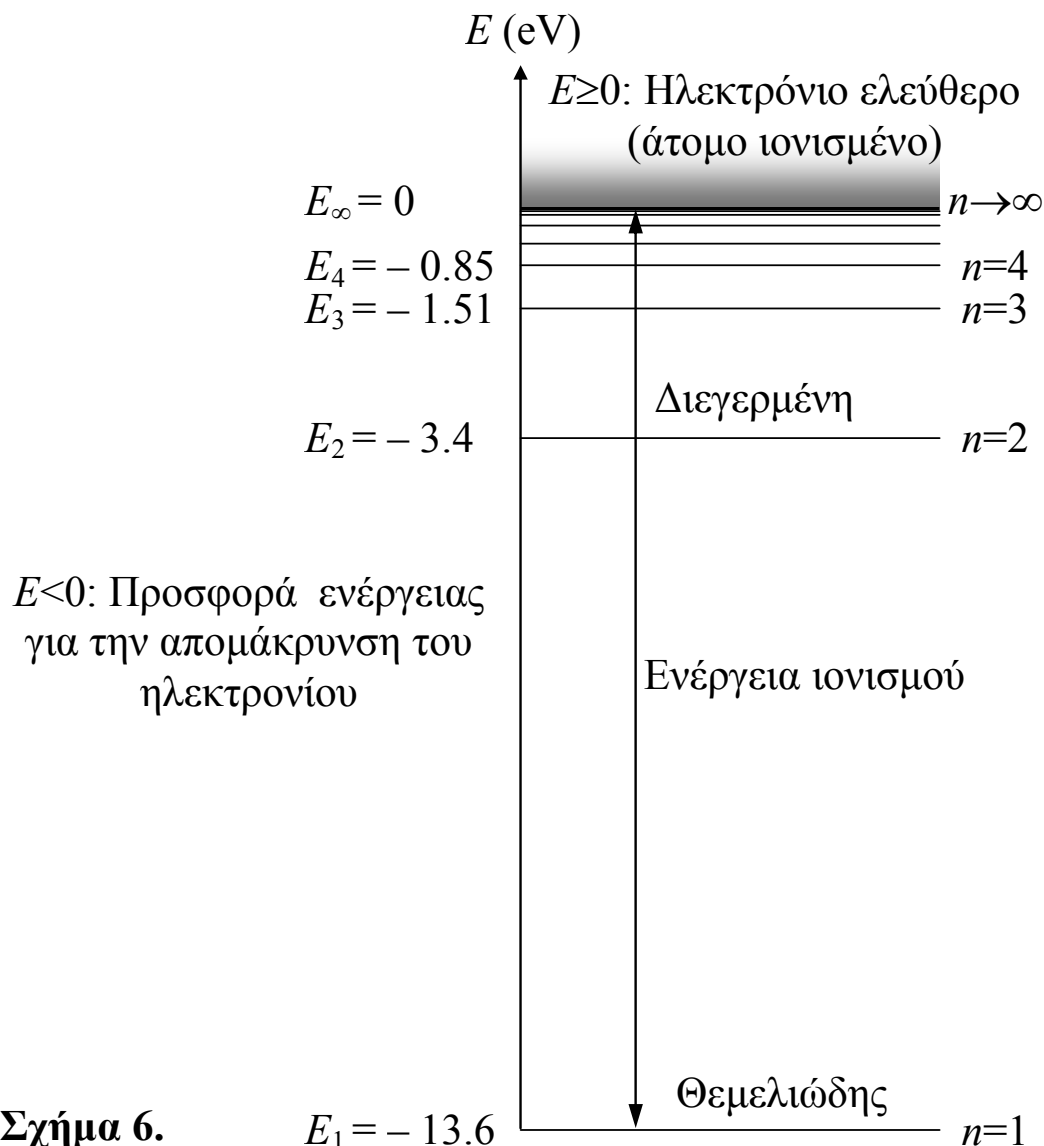
$$E_n = -\frac{1}{2} k \frac{e^2}{r_n} = -\frac{Ryd}{n^2} \quad (16)$$

όπου,

$$Ryd = \frac{k e^2}{2 a_0} = 13.6 \text{ eV} \quad (17)$$

η λεγόμενη σταθερά Rydberg. Το **ενεργειακό διάγραμμα** που αποδίδει την ενεργειακή δομή (ενεργειακές θέσεις των καταστάσεων) του ατόμου του Υδρογόνου, όπως περιγράφεται από τη σχέση (11), φαίνεται στο Σχ. 6. Παρατηρούμε ότι για $E < 0$ αποτελείται από μια ακολουθία **διάκριτων ενεργειακών επιπέδων** (κβάντωση ενέργειας) που χαρακτηρίζονται από τον λεγόμενο **κύριο κβαντικό αριθμό** n . Η αρνητική ενέργεια που έχουν, κατά σύμβαση, όλες αυτές οι **δέσμιες καταστάσεις** με κβαντικούς αριθμούς από $n=1$ έως και $n \rightarrow \infty$ σημαίνει ότι όταν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται αρχικά σε μία από αυτές και θέλουμε να το διεγείρουμε σε

ενεργειακά υψηλότερες (*διεγερμένες*) καταστάσεις ή και να το απομακρύνουμε εντελώς από το άτομο θα πρέπει να προσφέρουμε ενέργεια. Στην ενεργειακή θέση $E=0$ έχουμε το **κατώφλι ιονισμού**. Για $E>0$ το άτομο είναι ιονισμένο οπότε το σύστημα αποτελείται από ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο και ένα θετικά φορτισμένο ιόν (ειδικά για το Υδρογόνο ένα πρωτόνιο). Η ενεργειακή διαφορά μεταξύ της **θεμελιώδους κατάστασης** ($n=1$, $E_1 = -Ryd$) και του κατώφλιου ιονισμού ονομάζεται **ενέργεια** (ή **δυναμικό**) **ιονισμού**. Εάν το άτομο βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση και του προσφέρουμε ενέργεια ίση με την ενέργεια ιονισμού,



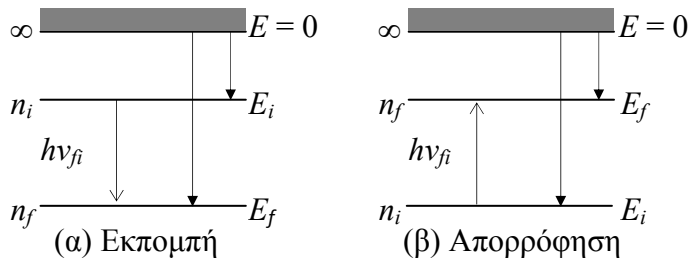
τότε το ηλεκτρόνιο απελευθερώνεται με μηδενική κινητική ενέργεια. Εάν προσφέρουμε ενέργεια μεγαλύτερη από την ενέργεια ιονισμού το ηλεκτρόνιο θα απελευθερωθεί με κινητική ενέργεια ίση με τη διαφορά της ενέργειας που προσφέραμε και της ενέργειας ιονισμού, *όπως και στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο*. Η περιοχή θετικών ενεργειών ονομάζεται **συνεχές** (η ενέργεια μπορεί να πάρει στην περιοχή αυτή συνεχές πεδίο τιμών). Μία μετάβαση από μια δέσμια κατάσταση ($E < 0$) σε μια κατάσταση του συνεχούς ($E > 0$) είναι, γενικά, πάντα επιτρεπτή. Το φωτόνιο δηλαδή απορροφάται πάντα και το άτομο ιονίζεται. Αντίθετα, η μετάβαση από μία δέσμια κατάσταση σε μία άλλη δέσμια κατάσταση πραγματοποιείται μόνον εάν η ενέργεια του φωτονίου είναι ίση με την ενεργειακή διαφορά των δύο καταστάσεων (σχέση (4)). Διαφορετικά η μετάβαση δεν πραγ-

ματοποιείται. Στο παράδειγμα του Σχ. 7 φαίνεται η εκπομπή ή απορρόφηση ενός φωτονίου μεταξύ δύο δέσμιων καταστάσεων. Εισάγοντας τη (16) στη (4) η συχνότητα του φωτονίου υπακούει στη σχέση,

$$h\nu_{if} = Ryd \left| -\frac{1}{n_f^2} + \frac{1}{n_i^2} \right| \quad (18)$$

από όπου τα μήκη κύματος της ακτινοβολίας βρίσκονται μέσω της σχέσης $\lambda_{if} = c_0/\nu_{if}$.

Η (18) προβλέπει ότι το φάσμα του ατόμου του Υδρογόνου θα είναι γραμμικό και το αναπαράγει σωστά. Αναπαράγει επίσης και την εμπειρική σχέση του Balmer και εξηγεί γιατί δεν ταυτίζονται τα φάσματα εκπομπής και απορρόφησης. Το γεγονός αυτό λοιπόν οφείλεται στο ότι σε θερμοκρασία δωματίου τα άτομα βρίσκονται στη θεμελιώδη κατάσταση μια και κατά τις κρούσεις μεταξύ ατόμων ανταλλάσσεται ενέργεια $\sim k_B T$ όπου k_B η σταθερά Boltzmann και T η απόλυτη θερμοκρασία του αερίου. Υπενθυμίζουμε ότι διέγερση μπορεί σε προκληθεί και μέσω κρούσεων, αλλά σε θερμοκρασία δωματίου η ποσότητα $k_B T$ είναι της τάξης των μερικών δεκάδων meV ($=10^{-3}$ eV) που δεν αρκούν ώστε να διεγείρουν τα άτομα από τη θεμελιώδη κατάσταση στην πρώτη διεγερμένη, εφόσον γι' αυτό απαιτούνται μερικά eV (Σχ. 6). Άρα, κατά την απορρόφηση φωτός στις συνθήκες αυτές, αρχική κατάσταση είναι πάντα η θεμελιώδης. Αντίθετα, όταν τα άτομα είναι διεγερμένα (είτε με φως είτε μέσω κρούσεων με τα ενεργητικά ηλεκτρόνια που υπάρχουν σε μια ηλεκτρική εκκένωση) υπάρχουν περισσότερες αρχικές καταστάσεις με αποτέλεσμα να μπορούν να απορροφήσουν και να εκπέμψουν και σε άλλα μήκη κύματος.



Σχήμα 7.

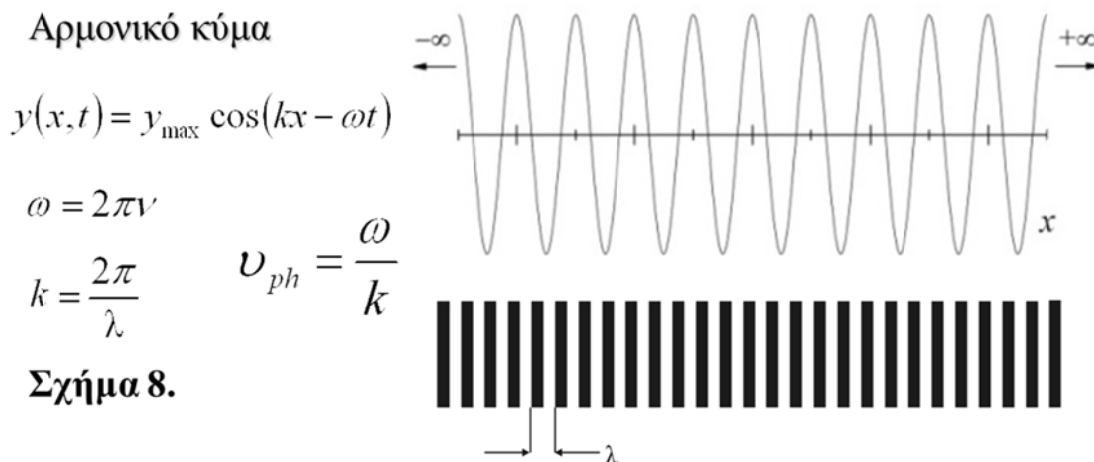
ση μπορεί σε προκληθεί και μέσω κρούσεων, αλλά σε θερμοκρασία δωματίου η ποσότητα $k_B T$ είναι της τάξης των μερικών δεκάδων meV ($=10^{-3}$ eV) που δεν αρκούν ώστε να διεγείρουν τα άτομα από τη θεμελιώδη κατάσταση στην πρώτη διεγερμένη, εφόσον γι' αυτό απαιτούνται μερικά eV (Σχ. 6). Άρα, κατά την απορρόφηση φωτός στις συνθήκες αυτές, αρχική κατάσταση είναι πάντα η θεμελιώδης. Αντίθετα, όταν τα άτομα είναι διεγερμένα (είτε με φως είτε μέσω κρούσεων με τα ενεργητικά ηλεκτρόνια που υπάρχουν σε μια ηλεκτρική εκκένωση) υπάρχουν περισσότερες αρχικές καταστάσεις με αποτέλεσμα να μπορούν να απορροφήσουν και να εκπέμψουν και σε άλλα μήκη κύματος.

Το μοντέλο του Bohr μπορεί επίσης να εφαρμοστεί σε όλα τα υδρογονοειδή θετικά ιόντα, δηλαδή τα ιονισμένα άτομα στα οποία έχει απομείνει μόνο ένα ηλεκτρόνιο, όπως για παράδειγμα το He^+ και το Li^{++} . Για τα θετικά ιόντα όμως οι ενέργειες θα δίνονται από την (11) αφού πολλαπλασιαστεί το δεξιό μέλος της επί Z^2 , με $+Ze$ το θετικό φορτίο του πυρήνα (π.χ. $Z=2$ για το He και $Z=3$ για το Li, Z ο ατομικός αριθμός). Όπως είναι φυσικό, έχοντας περάσει τις εξετάσεις όσον αφορά τις θέσεις των φασματικών γραμμών το μοντέλο καλείται να προβλέψει και τις διαφορετικές εντάσεις με τις οποίες εμφανίζονται οι γραμμές αυτές στα φάσματα. Στο σημείο αυτό αποτυγχάνει. Αποτυγχάνει επίσης σε όλες τις προβλέψεις που αφορούν τα γραμμικά φάσματα των ατόμων που είναι περιπλοκότερα των υδρογονοειδών αλλά και τη χρονική εξέλιξη των ατομικών συστημάτων. Το μεγαλύτερο όμως πρόβλημα του μοντέλου είναι ότι πρόκειται για ένα ετερόκλητο μίγμα από μη-κλασικές παραδοχές, διατυπωμένες σε ένα καθαρά κλασικό εννοιολογικό πλαίσιο. Ακόμη και το νέο για την εποχή του στοιχείο, δηλαδή οι συνθήκες κβάντωσης, εισάγονται στα πλαίσια του μοντέλου αξιωματικά. Η εξαγωγή τους μέσω της υπόθεσης de Broglie που παρουσιάσαμε παραπάνω, υποδηλώνει μεν ότι η ατομική ενεργειακή δομή οφείλεται στον κυματικό χαρακτήρα που εμφανίζουν τα σωματίδια του μικρόκοσμου (επιβεβαιώνοντας έτσι την αρχή του Κυματοσωματιδιακού Δυϊσμού), αλλά, από την άλλη, είναι σε μεγάλο βαθμό εξίσου αξιωματική. Τα προβλήματα αυτά θα λυθούν μόνον με την αυστηρή κβαντομηχανική περιγραφή του ατόμου.

3. Συνέπειες του Κυματοσωματιδιακού Δυϊσμού: Αρχή της Απροσδιοριστίας

3.1 Οι Κυματοσυρμοί – Ταχύτητα Φάσης & Ταχύτητα Ομάδας

Όπως είπαμε παραπάνω, η υπόθεση de Broglie και η πειραματική επιβεβαίωσή της οδήγησε στην ιδέα ότι κάθε σωματίδιο συνδέεται και μπορεί να περιγραφεί από ένα κύμα ύλης. Εκείνη την εποχή η φύση των κυμάτων αυτών ήταν ακόμη ασαφής και, το χειρότερο, δημιούργησε, αρχικά, επιπλέον ερωτήματα. Το κυριότερο είναι το ακόλουθο: Τα σωματίδια είναι περιορισμένα στο χώρο ενώ τα κύματα εκτεταμένα.



Ειδικά, ένα αρμονικό κύμα (π.χ. ένα επίπεδο μονοχρωματικό κύμα) της μορφής $y(z, t) = y_{\max} \cos(\omega t - kx)$ εκτείνεται από το $-\infty$ έως το $+\infty$ (Σχ. 8). Ένα τέτοιο κύμα δεν μπορεί να περιγράψει ένα εντοπισμένο σωματίδιο πεπερασμένης μάζας ηρεμίας και αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Ξεκινάμε από τη γνωστή σχέση,

$$E = \sqrt{p^2 c_o^2 + m_o^2 c_o^4} \quad (19)$$

όπου m_o η μάζα ηρεμίας ενός σωματιδίου και c_o η ταχύτητα του φωτός στο κενό (για τα φωτόνια $m_o=0$, οπότε $E = pc_o$). Για τα υλικά σωματίδια μη-μηδενικής μάζας ηρεμίας,

$$p = \gamma m_o v_\sigma \quad \text{και} \quad E = \gamma m_o c_o^2 \quad (20)$$

όπου v_σ η ταχύτητα του σωματιδίου και

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_\sigma / c)^2}}. \quad (21)$$

Από την άλλη, η ταχύτητα ενός αρμονικού κύματος (ταχύτητα φάσης με την οποία ταξιδεύει ένα μέτωπο κύματος) δίνεται από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής,

$$v_{ph} = \lambda \cdot \nu = \frac{\omega}{k} \quad (22)$$

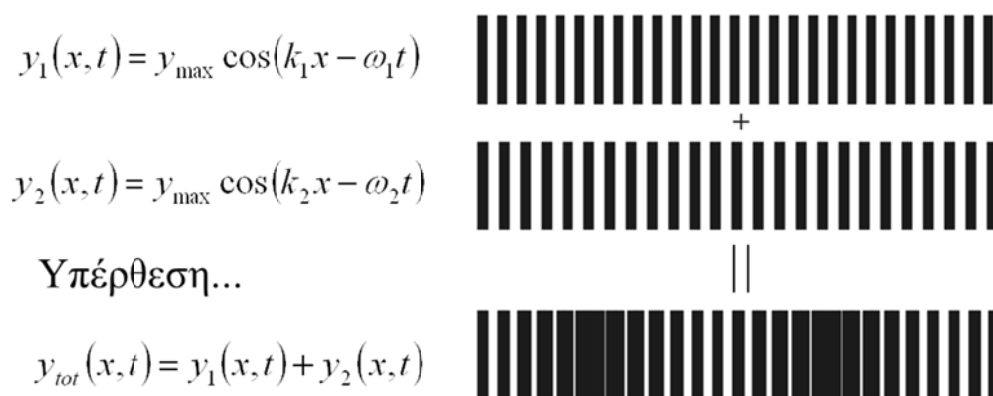
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις de Broglie (1α,β) έχουμε ότι

$$\lambda = h/p \quad \text{και} \quad \nu = E/h. \quad (23)$$

Αντικαθιστώντας τις (23) στην (22) και χρησιμοποιώντας τις (20) και (21) τελικά έχουμε ότι,

$$v_{ph} = \frac{c^2}{v_\sigma} = \frac{c}{v_\sigma} c > c. \quad (24)$$

Συνεπώς είτε πρέπει να δεχθούμε ότι το επίπεδο μονοχρωματικό κύμα ταξιδεύει γρηγορότερα όχι μόνο από το σωματίδιο αλλά και από το φως είτε ότι το κύμα που ψάχνουμε δεν μπορεί να είναι ένα απλό αρμονικό κύμα. Η απάντηση δίνεται, εν μέρει, από την ίδια τη Φύση στην οποία δεν συναντούμε αρμονικά κύματα (που αποτελούν εξιδανίκευση και απλούστευση για την ευκολότερη μελέτη κυματικών φαινομένων) αλλά τις λεγόμενες κυματομομάδες ή κυματοσυρμούς. Οι τελευταίοι μπορούν να παραχθούν από την υπέρθεση πολλών αρμονικών κυμάτων με διαφορετικές συχνότητες (άρα και μήκη κύματος λ , κυματάριθμους k και επακόλουθα και ορμές p). Επίσης, τα επιμέρους κύματα μπορούν να έχουν και διαφορετικό πλάτος το καθένα. Η υπέρθεση (άθροισμα ή ολοκλήρωμα για συνεχή πεδία τιμών) έχει ως αποτέλεσμα τον περιορισμό της χωρικής έκτασης της συνιστάμενης κυματομορφής. Ένα πρώτο παράδειγμα φαίνεται στο Σχ. 9 όπου υπερτίθενται μόνο δύο αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους $y_{\max}$ αλλά ελαφρά διαφορετικών κυκλικών συχνοτήτων ω_1 και ω_2 οπότε και δημιουργούν ένα διακρότημα.



Σχήμα 9.

Μετά από λίγες τριγωνομετρικές πράξεις, η υπέρθεση των δύο κυματομορφών γράφεται ως,

$$y_{tot}(x, t) = 2y_{\max} \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \quad (25)$$

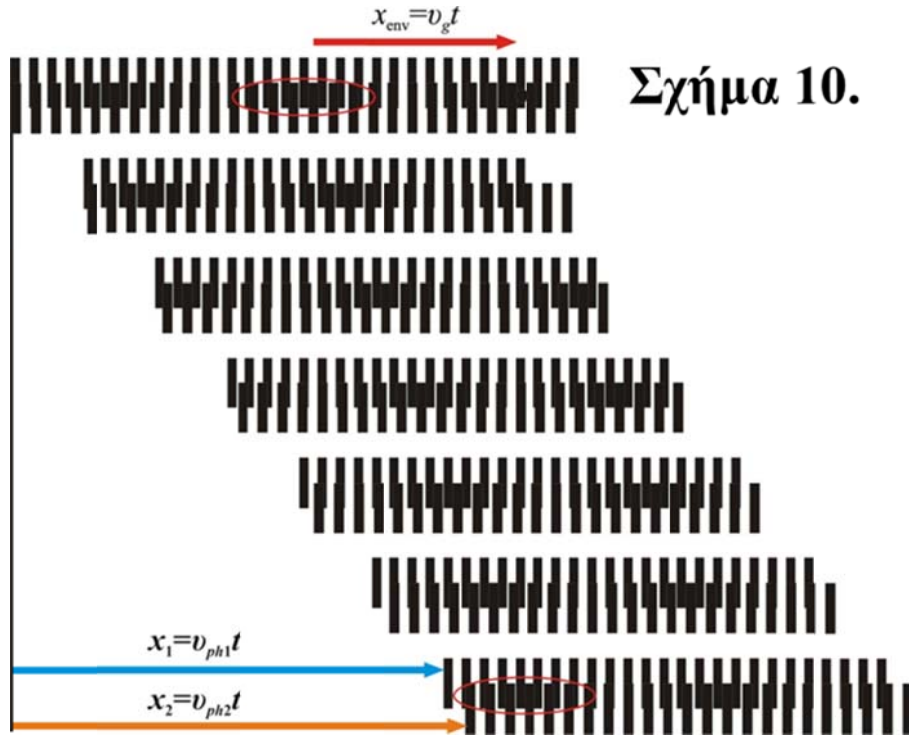
με

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2} \approx k_{1,2}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_{1,2} \quad (26)$$

(οι μέσες τιμές διαφέρουν ελάχιστα από τις επιμέρους συχνότητες και κυματάριθμους αφού έχουμε υποθέσει ότι αυτές είναι πολύ κοντά η μία στην άλλη). Παρατηρούμε ότι η σύνθετη κυματομορφή αποτελείται από έναν όρο που ταλαντώνεται με την ίδια συχνότητα και διαδίδεται με την ίδια ταχύτητα (σχέση (22)) των επιμέρους κυμάτων και έναν ακόμη όρο που διαμορφώνει τον πρώτο στο χρόνο. Ο δεύτερος όρος ταλαντώνεται πολύ αργά με το χρόνο, με συχνότητα $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$ και κυματάριθμο $\Delta k = |k_2 - k_1|$ και, το κυριότερο, διαδίδεται με ταχύτητα,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \approx \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (27)$$

τη λεγόμενη *ταχύτητα ομάδας*. Η τελευταία είναι, εν γένει, πολύ μικρότερη της v_{ph} και είναι η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ο «φάκελος» (περιοχή μέγιστου πλάτους). Αυτό φαίνεται στο Σχ. 10, όπου σε χρόνο t που αντιστοιχεί στη λεγόμενη περίοδο διακροτήματος, ο φάκελος διαδίδεται κατά απόσταση $x_{env}=v_g t$ ενώ τα δύο φέροντα κύματα κατά τις πολύ μεγαλύτερες αποστάσεις, $x_1=v_{ph1}t$ και $x_2=v_{ph2}t$.



Σχήμα 10.

3.2 Η Αρχή της Απροσδιοριστίας

Έχοντας υπ' υπόψη τα παραπάνω μπορούμε να αποφανθούμε εάν οι κυματοσυρμοί μπορούν να παραστήσουν ένα εντοπισμένο σωματίο. Ξεκινάμε πάλι από τις σχέσεις (20). Ο συνδυασμός τους μας δίνει,

$$v_{\sigma} = \frac{pc^2}{E} \quad (28)$$

Τώρα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1α,β) της υπόθεσης de Broglie εκφράζουμε τη ταχύτητα ομάδας ως,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar d\omega}{\hbar dk} = \frac{dE}{dp} \quad (29)$$

Την τελευταία παράγωγο, dE/dp μπορούμε να τη υπολογίσουμε μέσω της (19). Έχουμε λοιπόν ότι

$$\frac{dE}{dp} = \frac{d\left([p^2 c^2 + m_0^2 c^4]^{1/2}\right)}{dp} = \frac{pc^2}{E} \quad (30)$$

Συγκρίνοντας τις (28), (29) και (30) καταλήγουμε στο σημαντικό αποτέλεσμα,

$$v_{\sigma} = v_g. \quad (31)$$

Συνεπώς, οι κυματοσυρμοί, που μπορούν να περιγραφούν μέσω της υπέρθεσης επιπέδων κυμάτων, είναι σε θέση να περιγράψουν ένα εντοπισμένο σωματίδιο. Ενώ λοιπόν η φύση αυτών των κυμάτων ύλης παραμένει ακόμη άγνωστη και αγνοούμε, επίσης, εάν περιγράφονται από την κυματική εξίσωση (υλικών ή H/M κυμά-

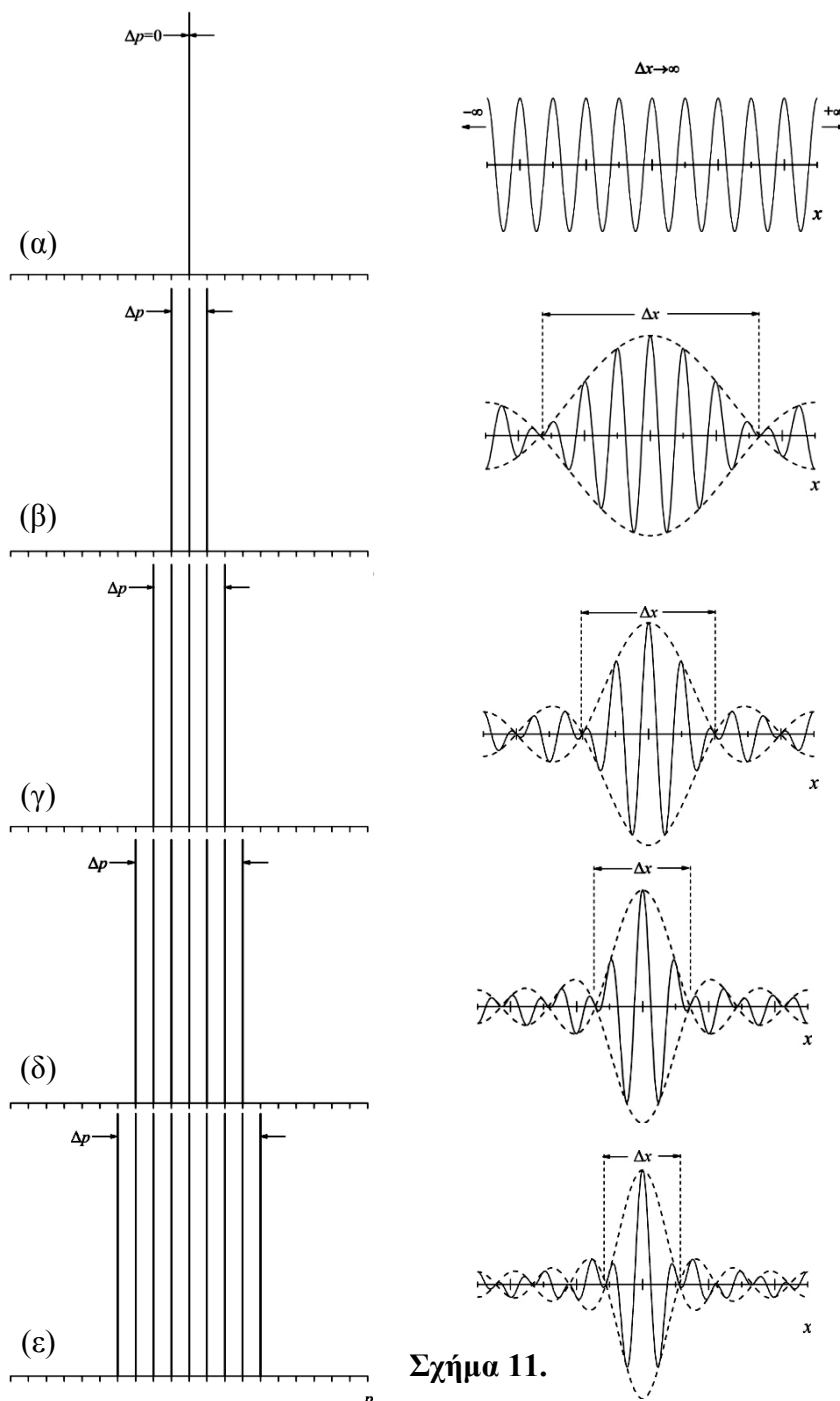
των), γνωρίζουμε ότι θα έχουν τη μορφή κυματοσυρμών. Μπορούμε λοιπόν να εξάγουμε συμπεράσματα βασισμένοι σε αυτή την εικόνα και όσα γνωρίζουμε από την κυματική γι' αυτούς. Μερικά ακόμη παραδείγματα βλέπουμε στα Σχ. 11(β) - (ε).

Παρατηρούμε ότι όσο περισσότερα κύματα διαφορετικών κυματάριθμων k προσθέτουμε, τόσο περισσότερο στενεύουμε τη χωρική έκταση της κυματομορφής, που διαδίδεται κατά τη διεύθυνση x . Διατυπώνοντας λίγο διαφορετικά, όσο αυξάνουμε το εύρος κυματάριθμων Δk τόσο στενεύουμε το χωρικό εύρος Δx (και αντίστροφα). Θέτοντας την παραπάνω συμπεριφορά σε μαθηματική μορφή, η Κυματική προβλέπει ότι το ζεύγος Δk και Δx ικανοποιεί τη σχέση $\Delta k \cdot \Delta x \geq 1$. Όμως, από την υπόθεση de Broglie έχουμε ότι $\Delta k = \Delta p_x / \hbar$ οπότε και η σχέση αυτή γράφεται ως,

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \quad (32)$$

και συνοψίζει τη Αρχή της Απροσδιοριστίας (ή Αβεβαιότητας) του Heisenberg (1927). Διατυπώνοντάς την με λόγια: Η θέση x και η ορμή p_x ενός σωματιδίου δεν μπορούν να είναι γνωστά με οποιαδήποτε ακρίβεια. Όσο καλύτερα γνωρίζουμε το ένα μέγεθος τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητά μας για το άλλο. Η

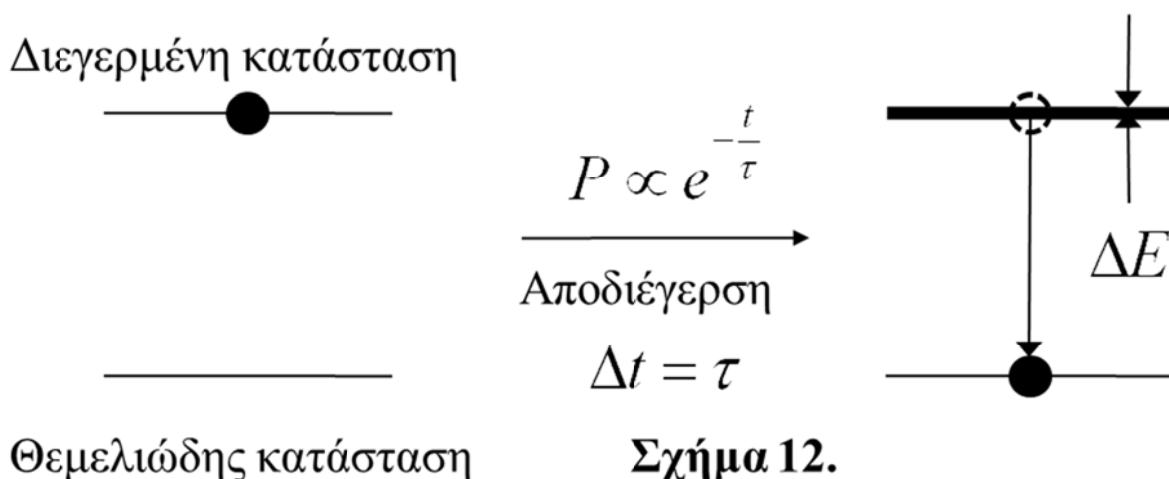
αρχή του Heisenberg δεν εκφράζει κάποια πειραματική αδυναμία ταυτόχρονης μέτρησης αλλά μια εγγενή (από τη φύση της) αδυναμία ταυτόχρονης ύπαρξης συγκεκριμένης θέσης και ορμής στο μικρόκοσμο. Προκύπτει από την κυματική συμπεριφορά των σωματιδίων, διότι για τα κύματα είναι αδύνατος ο ταυτόχρονος περιορισμός των Δx και Δk πέραν ενός κατώτατου ορίου. Τι γίνεται στις δύο ή τρεις διαστάσεις του χώρου; Στην περίπτωση αυτή ισχύει επίσης ότι $\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar$, και $\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar$, ενώ δεν τίθεται περιορισμός για δύο διαφορετικές διευθύνσεις, π.χ. $\Delta y \cdot \Delta p_x \geq 0$. Τέλος, ακολουθώντας έναν ανάλογο συλλογισμό, αλλά στο χρόνο και όχι στο χώρο, η αρχή της απροσδιοριστίας προβλέπει επίσης ότι,



Σχήμα 11.

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar \quad (33)$$

όπου ΔE είναι η αβεβαιότητα με την οποία είναι γνωστή η ενέργεια ενός συστήματος και Δt ο χρόνος εξέλιξής του (δηλαδή ο χρόνος που χρειάζεται για να παρατηρηθεί κάποια αισθητή μεταβολή στις ιδιότητές του). Με αυτά υπ' όψη μπορούμε να πούμε ότι όσο πιο αργά μεταβάλλεται ένα σύστημα (Δt μεγάλο) τόσο πιο καλά καθορισμένη είναι η ενέργειά του (ΔE μικρό) και αντίστροφα. Πχ. είναι γνωστό ότι άτομα που είναι διεγερμένα σε κάποια κατάσταση αποδιεγείρονται προς ενεργειακά χαμηλότερες καταστάσεις. Η πιθανότητα να αποδιεγερθούν γράφεται ως $P \propto e^{-t/\tau}$, με τ το λεγόμενο χρόνο ζωής, που αποτελεί στην περίπτωση αυτή την



«απροσδιοριστία χρόνου» Δt . (Σχ. 12). Αυτό συνεπάγεται ότι η ενέργεια της διεγερμένης κατάστασης θα είναι γνωστή με αβεβαιότητα $\Delta E \geq \hbar/\Delta t$, δηλαδή η κατάσταση αποκτά ενεργειακό εύρος. Μόνο για την ενεργειακά χαμηλότερη κατάσταση ισχύει ότι $\Delta E=0$ λόγω του ότι το σύστημα, εάν δεν διαταραχθεί, θα παραμείνει εκεί επ' άπειρον ($\Delta t \rightarrow \infty$).

Συνοψίζοντας, αυτό που εκφράζει η αρχή της απροσδιοριστίας (σχέση (32)) είναι ότι στο μικρόκοσμο η σωματιδιακή φύση του φωτός και η κυματική φύση της ύλης δεν μπορεί να αγνοηθεί, **με συνέπεια η διαταραχή που εισάγεται από μια διαδικασία μέτρησης να μην μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή** (αντίθετα προς την κλασική αντίληψη). Μερικά παραδείγματα εφαρμογής της θα δοθούν υπό μορφή ασκήσεων. Προς το παρόν, ας δούμε το λόγο για τον οποίο η κυματική συμπεριφορά της ύλης δεν γίνεται αντιληπτή στο μακρόκοσμο. Ας πάρουμε ως παράδειγμα την περίθλαση Bragg από τη σχέση της οποίας ($2\Lambda \sin \theta_n = n\lambda$) είναι φανερό ότι για να μετρήσουμε κυματικά φαινόμενα θα πρέπει το μήκος κύματος λ να είναι συγκρίσιμο με τις χαρακτηριστικές διαστάσεις Λ της σκεδάζουσας διάταξης (φράγμα περίθλασης, φυσικός κρύσταλλος κλπ). Θεωρήστε λοιπόν ένα αυτοκίνητο της Formula 1 που ζυγίζει 1000 kg και τρέχει με ταχύτητα 360 km/h (=100 m/s). Τότε, $p=m \cdot v=10^{15}$ kg·m/s και το μήκος κύματος de Broglie που του αντιστοιχεί είναι $\lambda=h/p=6.6 \times 10^{-19}$ m. Δεν υπάρχει φυσικός ή τεχνητός κρύσταλλος με συγκρίσιμες χαρακτηριστικές διαστάσεις για να μας αποκαλύψει την κυματική φύση αυτού του μακροσκοπικού αντικειμένου.

Κ3. Ασκήσεις/Προβλήματα

Ατομικό Μοντέλο του Bohr

1. Στο άτομο του Υδρογόνου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται διεγερμένο στην κατάσταση με $n=2$. Κάποια στιγμή αποδιεγείρεται προς χαμηλότερη κατάσταση. Βρείτε την ενέργεια, τη συχνότητα και το μήκος κύματος του εκπεμπομένου φωτονίου.
2. Στο άτομο του Υδρογόνου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση με $n=1$. Απορροφά φωτόνιο ενέργειας 15 eV και ιονίζεται. Ποια η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου που διαφεύγει; (Υπόδειξη: Η διεργασία είναι παρόμοια με το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο).
3. Υπολογίστε την κατά Bohr ταχύτητα του ηλεκτρονίου στη θεμελιώδη κατάσταση ενός υδρογονοειδούς ατόμου (πυρηνικό φορτίου Z και ένα ηλεκτρόνιο) και συγκρίνετε την με την ταχύτητα του φωτός.

Απάντηση:

$$m_e \frac{v^2}{r} = k \frac{(Ze)e}{r^2} \rightarrow m_e v^2 = k \frac{Ze^2}{r} \quad (1)$$

$$m_e v r = n\hbar \rightarrow r = \frac{n\hbar}{m_e v} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2)

$$m_e v^2 = kZe^2 \frac{m_e v}{n\hbar} \rightarrow v_n = \frac{ke^2}{\hbar} \frac{Z}{n} \rightarrow \frac{v_n}{c} = \frac{ke^2}{\hbar c} \frac{Z}{n} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές σταθερές (όλες σε SI)

$$\frac{v_n}{c} = \frac{ke^2}{\hbar c} \frac{Z}{n} = \frac{8.99 \times 10^9 (1.602 \times 10^{-19})^2}{1.0545 \times 10^{-34} \cdot 2.9979 \times 10^8} \frac{Z}{n} \cong \frac{1}{137} \frac{Z}{n}$$

Θεμελιώδης σημαίνει $n=1$. Για το Υδρογόνο ($Z=1$) η ταχύτητα του ηλεκτρονίου στη θεμελιώδη κατάσταση είναι πάνω από δύο τάξεις μεγέθους μικρότερη της c ($v_1=7.3 \times 10^{-3}c$). Τα σχετικιστικά φαινόμενα δεν είναι ιδιαίτερα σημαντικά. Αντίθετα, για τα βαριά άτομα με μεγάλο Z είναι ιδιαίτερα σημαντικά, π.χ. για το U με $Z=92$ έχουμε $v_1=0.67c$.

4. Αρχή της Αντιστοιχίας. Υπολογίστε την συχνότητα περιφοράς του ηλεκτρονίου στην κατάσταση με κβαντικό αριθμό n . Στη συνέχεια, υπολογίστε τη συχνότητα της μετάβασης $n \rightarrow n-1$ στο όριο $n \gg 1$ (όριο μεγάλων κβαντικών αριθμών) και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την συχνότητα περιφοράς.

Απάντηση:

Ομαλή κυκλική κίνηση

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi f r \quad (1)$$

και

$$m_e v r = n\hbar \rightarrow v = \frac{n\hbar}{m_e r} \quad (2)$$

και

$$r_n = a_o n^2 = \frac{\hbar^2}{m_e k e^2} n^2 \quad (3)$$

Από τις (1)-(3)

$$v_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n} = \frac{n\hbar}{m_e a_o n^2} = 2\pi f_n r_n = 2\pi f_n a_o n^2$$

από όπου

$$f_n = \frac{m_e k^2 e^4}{2\pi\hbar^3} \frac{1}{n^3} \quad (4)$$

Η συχνότητα του φωτονίου που εκπέμπεται ή απορροφάται κατά τη μετάβαση $n \rightarrow n-1$ γράφεται

$$hf_{if} = |E_f - E_i| = Ryd \left| -\frac{1}{n_f^2} + \frac{1}{n_i^2} \right| = \frac{m_e k^2 e^4}{2\hbar^2} \left| -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} \right| \quad (5)$$

γράφουμε

$$h=2\pi\hbar$$

και

$$\left| -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} \right| = \left| \frac{n^2 - (n-1)^2}{n^2(n-1)^2} \right| = \left| \frac{n^2 - n^2 - 1 + 2n}{n^2(n-1)^2} \right| \approx \frac{2n}{n^4} = \frac{2}{n^3}$$

εφόσον $n \gg 1$, συνεπώς $n-1 \sim n$ ($2n-1 \sim 2n$), με αποτέλεσμα η $f_{n,n-1}$ της (5) να καταλήγει στην (4). Συνεπώς στο όριο των μεγάλων κβαντικών αριθμών το μοντέλο του Bohr οδηγεί στην πρόβλεψη της Κλασσικής Φυσικής (H/M θεωρία) όπου ένα επιταχυνόμενο φορτίο εκπέμπει ακτινοβολία με συχνότητα ίση με τη συχνότητα της περιφοράς του.

5. Αρχή της Αντιστοιχίας. Πρόβλημα 31, σελ. 128 του Serway.

6. Σε ποια θερμοκρασία T ο λόγος του πληθυσμού της πρώτης διεγερμένης κατάστασης ως προς τον πληθυσμό της θεμελιώδους κατάστασης του ατόμου του Υδρογόνου θα είναι ίσος με 0.1;

Κύματα de Broglie - Αρχή της απροσδιοριστίας

1. Ελεύθερο ηλεκτρόνιο έχει ενέργεια 4.141 eV. Βρείτε τη συχνότητα και το μήκος κύματος de Broglie που του αντιστοιχεί.

2. Θέλουμε να περιγράψουμε ένα σωματίδιο με ορμή $p_o = \hbar k_o$ και απροσδιοριστία ορμής Δp μέσω μιας υπέρθεσης κλασσικών αρμονικών κυμάτων, κατά τη χρονική στιγμή $t=0$ όπου το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $x_o=0$ με απροσδιοριστία θέσης Δx . Χρησιμοποιούμε $2N+1$ κύματα με κυματάρηθμους $k_n = k_o + n \cdot \delta k$ (δk σταθερό) όπου ο ακέραιος n παίρνει τιμές $n = -N, \dots, 0, \dots, +N$. Η υπέρθεση λοιπόν γράφεται ως

$$y_{tot,N}(x, t=0) = \sum_{n=-N}^{+N} A_n \cos[(k_o + n\delta k)x]$$

όπου το κάθε κύμα μπορεί να έχει και διαφορετικό πλάτος A_n .

(Α) Αποδείξτε ότι,

$$y_{tot,N}(x) = A_0 \cos[k_0 x] y_{env}(x)$$

με

$$y_{env}(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{A_0} \cos[n \delta k x]$$

ότι δηλαδή το άπειρης χωρικής έκτασης αρμονικό κύμα $A_0 \cos[k_0 x]$, διαμορφώνεται από το «φάκελο» y_{env} .

(B) Ο φάκελος περιορίζει τη χωρική έκταση της κυματο-ομάδας σε ένα διάστημα Δx_N το οποίο ορίζουμε ως την απόσταση μεταξύ των πρώτων μηδενισμών της y_{env} , εκατέρωθεν της θέσης x_0 . Η αντίστοιχη απροσδιοριστία της ορμής γράφεται προσεγγιστικά ως $\Delta p_N \approx 2N\hbar\delta k$. Συγκρίνετε τις απροσδιοριστίες Δx_N και Δp_N καθώς και το γινόμενο $\Delta p_N \Delta x_N$ μεταξύ των ακόλουθων περιπτώσεων:

ι) $N=1$ $A_0=1$, $A_1=A_{-1}=\sqrt{2}/2$

ιι) $N=2$, $A_0=1$, $A_1=A_{-1}=\sqrt{2}/2$, $A_2=A_{-2}=1/2$.

Για κάθε περίπτωση σχεδιάστε την κατανομή των ορμών που συμμετέχουν στην κυματο-ομάδα, τον φάκελο $y_{env}(x)$ και το συνολικό κύμα $y_{tot}(x)$ για $k_0=1$ και $\delta k=0.1$ (τα δύο τελευταία με κατάλληλο λογισμικό κατασκευής γραφικών παραστάσεων).

(Γ) Σχολιάστε τη περίπτωση $N=0$.

3. Σωματίδιο μάζας m είναι εγκλωβισμένο σε μια περιοχή διαστάσεων L . Εντός της περιοχής αυτής δεν του ασκούνται δυνάμεις. Σύμφωνα με την υπόθεση de Broglie τα σωματίδια συνδέονται με κύματα ύλης. Θεωρήστε λοιπόν δύο κύματα ύλης, ένα που περιγράφει την κίνηση του σωματιδίου προς τα αριστερά και ένα που περιγράφει την κίνησή του προς τα δεξιά. Τα δύο αυτά κύματα συμβάλλουν δημιουργώντας ένα στάσιμο κύμα με δεσμούς στα άκρα της περιοχής εγκλωβισμού. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, βρείτε τις επιτρεπτές τιμές της μηχανικής ενέργειας του σωματιδίου. Βρείτε επίσης την ταχύτητά του στη θεμελιώδη κατάσταση.

Εφαρμογή: (α) $m=1$ g, $L=1$ cm (μακροσκοπικό σώμα και περιοχή εγκλωβισμού), (β) $m \approx 9 \times 10^{-31}$ kg, $L \approx 1 \times 10^{-10}$ m (ηλεκτρόνιο εγκλωβισμένο στις διαστάσεις ενός ατόμου). Τι παρατηρείτε;

4. Ένα ηλεκτρόνιο έχει κατά προσέγγιση ταχύτητα ίση με 10^6 m/sec. Πόσο είναι κατά προσέγγιση το μήκος κύματος de Broglie; Η αβεβαιότητα στη ταχύτητά του είναι 3×10^5 m/sec. Πόση είναι κατά προσέγγιση η αβεβαιότητα στη θέση του;

5. Η αβεβαιότητα στην ορμή ενός ηλεκτρονίου που κινείται σε μια διάσταση είναι $\Delta p_x = 10^{-25}$ kg·m/sec. Πόση είναι περίπου η διάσταση του μικρότερου «κουτιού» στο οποίο μπορούμε να το περιορίσουμε;

6. Ένα πρωτόνιο βρίσκεται μέσα σε μια σφαιρική περιοχή διαμέτρου 1 m. Υπολογίστε την ελάχιστη ταχύτητα του πρωτονίου που είναι συμβιβαστή με τον εντοπισμό του μέσα στη περιοχή αυτή.

7. Εάν ένα ηλεκτρόνιο είναι περιορισμένο εντός ενός ατόμου τυπικής διαμέτρου $2a_0 \sim 1$ Å (a_0 η ακτίνα του Bohr) βρείτε την ελάχιστη κινητική και μηχανική του ενέργεια και συγκρίνετέ την με την ενέργεια του ατόμου του υδρογόνου στη θεμελιώδη του κατάσταση. Συγκρίνετέ την επίσης με τη θερμική ενέργεια $3kT/2$ ενός σωματιδίου σε θερμοκρασία δωματίου.

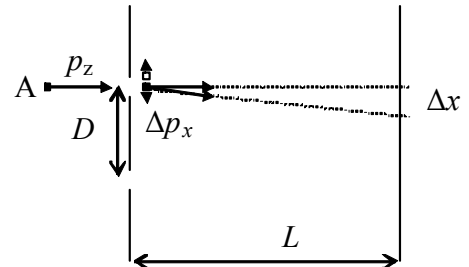
8. Ποια η ελάχιστη κινητική ενέργεια του πρωτονίου όταν βρίσκεται εγκλωβισμένο εντός ενός ατομικού πυρήνα τυπικών διαστάσεων $\sim 10^{-14}$ m;

9. Ένα ηλεκτρόνιο έχει αβεβαιότητα θέσης $\Delta x = 10^{-6}$ m. Η ταχύτητά του είναι περίπου 10^6 m/s. Θέλουμε να μετρήσουμε την ορμή του με ακρίβεια 1 μέρος στα 1000. Είναι δυνατόν να γίνει αυτό; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

10. Ένα ηλεκτρόνιο είναι εγκλωβισμένο εντός ενός «πηγαδιού» δυναμικής ενέργειας ατομικών διαστάσεων. Κάποιος μας λέει ότι βρίσκεται στη θέση όπου η δυναμική ενέργεια παρουσιάζει ελάχιστο και ότι είναι ακίνητο. Τον πιστεύετε ή όχι και γιατί;



11. Στο πείραμα συμβολής διπλής σχισμής του Young οι θέσεις των φωτεινών κροσσών δίδονται από τη σχέση $D \sin \theta_n = n\lambda$ όπου D η απόσταση των δύο σχισμών. Κάποια σωματίδια A, ορμής p_z , βάλλονται προς τις δύο σχισμές και οι κροσσοί συμβολής παρατηρούνται σε οθόνη που απέχει κατά L από τις σχισμές. Μετά τις σχισμές υπάρχουν ακίνητα σωματίδια-Δείκτες που μας πληροφορούν από ποια σχισμή πέρασε κάθε σωματίδιο A. Μετά τη κρούση ενός σωματιδίου A με ένα σωματίδιο-Δείκτη το τελευταίο αποκτά ορμή Δp_x και (έστω ότι) κινείται προς τα επάνω. Λόγω της διατήρησης της ορμής, το σωματίδιο A αποκτά επίσης μια συνιστώσα Δp_x αντίθετης κατεύθυνσης. Η συνιστώσα αυτή έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση απροσδιοριστίας θέσης Δx στην οθόνη. Ισχύει ότι $\Delta x < D$. Αποδείξτε ότι η απόσταση Δx είναι μεγαλύτερη της απόστασης μεταξύ διαδοχικών κροσσών $\Delta x_{m+1,m}$, με αποτέλεσμα την εξαφάνισή τους στην περίπτωση όπου καθορίζουμε την σχισμή από την οποία προήλθε κάθε σωματίδιο A. Δεχθείτε ότι όλες οι γωνίες του προβλήματος είναι μικρές οπότε ($\sin \theta \sim \tan \theta \sim \theta$).



K4. Η Εξίσωση Schrödinger & ο Κβαντικός Μικρόκοσμος

1. Η Κλασική Κυματική Εξίσωση

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση της εξίσωσης Schrödinger, είναι χρήσιμο να σχολιάσουμε την κλασική κυματική εξίσωση, που γράφεται ως,

$$\frac{1}{v^2} \frac{d^2 y(x,t)}{dt^2} = \frac{d^2 y(x,t)}{dx^2} \quad (1)$$

και είναι μία διαφορική εξίσωση με διπλές μερικές παραγώγους ως προς το χρόνο και τη θέση. Είναι δε γνωστό ότι η (1) επιδέχεται ως λύσεις, τα επίπεδα, μονοχρωματικά (αρμονικά) κύματα

$$y(x,t) = \cos(kx - \omega t) \text{ και } y(x,t) = \sin(kx - \omega t), \quad (2)$$

όπου η κυκλική συχνότητα ω και ο κυματάριθμος $k=2\pi/\lambda$ συνδέονται με τη φασική ταχύτητα $v_{ph}=\omega/k$. Περιπλοκότερες κυματικές μορφές (κυματοομάδες ή κυματοσυρμοί) προκύπτουν από την υπέρθεση πολλών αρμονικών κυμάτων, με διαφορετικές συχνότητες, κυματάριθμους και πλάτη, π.χ. $y_{tot} = A_1 y_1(x,t) + A_2 y_2(x,t)$. Συνεπώς, εδώ επικεντρώνουμε της προσοχή μας μόνο στα αρμονικά κύματα, δηλαδή τις λύσεις (2) που είναι προφανώς πραγματικές (διαφορετικά δεν θα ήταν φυσικά αποδεκτές). Όμως, για λόγους ευκολίας και μόνον, συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε τη μιγαδική μορφή

$$y(x,t) = e^{i(kx - \omega t)} \quad (3)$$

όπου ο εκθετικός όρος ορίζεται ως,

$$e^{\pm i\varphi} \equiv \cos \varphi \pm i \sin \varphi \quad (4)$$

(i είναι η φανταστική μονάδα). Μέσω της μορφής (3) λοιπόν μπορούμε να εργαστούμε και με τις δύο λύσεις ταυτόχρονα. Στο τέλος του υπολογισμού μας όμως θα πρέπει να πάρουμε ως φυσικά αποδεκτή λύση είτε το πραγματικό είτε το φανταστικό μέρος της μιγαδικής κυματομορφής.

2. Η Εξίσωση Schrödinger Ελεύθερου Σωματιδίου

Στις σημειώσεις του, που αφορούν τις εξελίξεις στη Φυσική περί τα 1926, ο F Bloch αναφέρει ότι κάποια στιγμή ο E Schrödinger έδωσε μία ομιλία στους συναδέλφους του όπου παρουσίασε λεπτομερώς την υπόθεση de Broglie. Στο τέλος της ομιλίας ο P Debye σχολίασε ότι αυτός ο τρόπος περιγραφής των σωματιδίων του μικρόκοσμου με κύματα του φαινόταν κάπως παιδιάστικός. Αυτός, ως μαθητής του Sommerfeld, είχε μάθει ότι για να μιλήσει κανείς σωστά για τα κύματα πρέπει να έχει μια κυματική εξίσωση. Ύστερα από μερικές εβδομάδες ο Schrödinger έδωσε άλλη μία ομιλία, την οποία άρχισε λέγοντας, «Ο συνάδελφος Debye είπε ότι πρέπει να έχει κανείς μια κυματική εξίσωση. Ε λοιπόν, βρήκα μία...» και παρουσίασε τη φερώνυμη εξίσωσή του.

Δεν γνωρίζουμε πως ακριβώς κατέληξε ο Schrödinger στην εξίσωσή του. Μπορούμε μόνο να υποθέσουμε ότι η ευρετική διαδικασία ήταν παρόμοια με τους συλλογισμούς που ακολουθούν: Έχουμε ήδη δείξει ότι ένα απλό αρμονικό κύμα δεν μπορεί να περιγράψει ένα σωματίδιο. Μπορεί όμως, όπως είδαμε, να το

κάνει μια κυματοομάδα, με ταχύτητα ομάδας $v_g = d\omega/dk$. Εφόσον όμως οι κυματοομάδες μπορούν να περιγραφούν μέσω της υπέρθεσης πολλών αρμονικών κυμάτων, είναι λογικό να περιμένουμε ότι το απλό αρμονικό κύμα θα είναι και αυτό λύση της «κυματικής» εξίσωσης που ψάχνουμε και μέσω της οποίας θα μπορούμε να περιγράψουμε το σωματίδιο. Ας υποθέσουμε λοιπόν, κατ' αρχήν, ότι έχουμε να κάνουμε με ένα ελεύθερο μη-σχετικιστικό σωματίδιο. Με τον όρο «ελεύθερο» εννοούμε ότι στο σωματίδιο δεν ασκούνται δυνάμεις, η δυναμική του ενέργεια είναι μηδενική και η μηχανική του ενέργεια είναι αποκλειστικά κινητική,

$$E = K = \frac{p^2}{2m}. \quad (5)$$

Έστω επίσης ότι το σωματίδιο μπορεί να περιγραφεί μέσω της υπέρθεσης κυμάτων της μορφής (3). Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό Ψ για την λεγόμενη *κυματοσυνάρτηση* και τις σχέσεις de Broglie

$$E = \hbar\omega \quad (6\alpha)$$

$$p = \hbar k \quad (6\beta)$$

η Ψ γράφεται ως,

$$\Psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}. \quad (7)$$

Ψάχνουμε για μία «κυματική εξίσωση» που θα αναπαραγάγει τη σχέση ενέργειας-ορμής (5). Παραγωγίζοντας την (7) μία φορά ως προς χρόνο t , βρίσκουμε ότι

$$\frac{d\Psi(x, t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} E e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi(x, t) \quad (8)$$

ενώ, εάν την παραγωγίσουμε δύο φορές ως προς της θέση x , βρίσκουμε αντίστοιχα ότι

$$\frac{d^2\Psi(x, t)}{dx^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi(x, t). \quad (9)$$

($i^2 = -1$). Συνδυάζοντας τις (8), (9) και (5) καταλήγουμε στην εξίσωση,

$$i\hbar \frac{d\Psi(x, t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x, t)}{dx^2} \quad (10)$$

που είναι πράγματι η εξίσωση Schrödinger για ελεύθερο μη-σχετικιστικό σωματίδιο στη μία διάσταση (x).

3. Η Εξίσωση Schrödinger για Μη-μηδενική Δυναμική Ενέργεια

Πρέπει να τονιστεί ότι η παραπάνω ευρετική διαδικασία, με κανένα τρόπο δεν αποτελεί «απόδειξη» της εξίσωσης (10). Αυτό γίνεται κατανοητό εάν γράψουμε την αντίστοιχη εξίσωση Schrödinger στην περίπτωση όπου η δυναμική ενέργεια $U(x, t)$ δεν είναι μηδενική,

$$i\hbar \frac{d\Psi(x, t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x, t)}{dx^2} + U(x, t)\Psi(x, t). \quad (11)$$

και την οποία αδυνατούμε να «αποδείξουμε» με συλλογισμούς αντίστοιχους των παραπάνω. Στην πραγματικότητα η εξίσωση Schrödinger δεν αποδεικνύεται. Είναι η θεμελιώδης εξίσωση της *Κβαντομηχανικής* και η «αλήθεια» της ελέγχεται από τη δυνατότητα να κάνει προβλέψεις σε συμφωνία με το πείραμα. Μας λέει δη-

λαδή το «πώς» λειτουργεί η Φύση αλλά όχι και το «γιατί». Αντίθετα, η κυματική εξίσωση (1) εξάγεται για τα μεν μηχανικά κύματα από το νόμο του Νεύτωνα, για τα δε ηλεκτρομαγνητικά κύματα από τις εξισώσεις του Maxwell.

4. Η Κυματοσυνάρτηση Ψ

Παρατηρούμε ότι οι (10) και (11) έχουν κάποιες ομοιότητες με την κυματική εξίσωση (1). Έχουν όμως και σημαντικές διαφορές. Μια από τις διαφορές έχει να κάνει με την εμφάνιση της διπλής παραγώγου ως προς το χρόνο στην (1) ενώ της απλής παραγώγου στις (10) και (11). Μια σημαντικότερη διαφορά όμως είναι η εξής: Ενώ η μορφή της (1) υποδηλώνει ότι οι λύσεις y πρέπει να είναι πραγματικές (και η μορφή (3) χρησιμοποιείται, όπως είπαμε, μόνο λόγω της ευκολίας που προσφέρει στους υπολογισμούς), οι (10) και (11) υποδηλώνουν ότι η αντίστοιχη λύση Ψ πρέπει αναγκαστικά να είναι μιγαδική. Αυτό συμβαίνει διότι ενώ το αριστερό τους μέλος περιέχει τη φανταστική μονάδα, το δεξιό τους μέλος δεν της περιέχει. Ως παράδειγμα, μπορείτε να επιβεβαιώσετε και μόνοι σας ότι οι πραγματικές εκφράσεις $\cos[(px - Et)/\hbar]$ και $\sin[(px - Et)/\hbar]$ δεν αποτελούν λύση της (10) ενώ η μιγαδική μορφή (7) αποτελεί. Για το λόγο αυτό η αντίδραση των Φυσικών απέναντι στη Ψ ήταν αρχικά διστακτική, διότι, εύλογα μπορεί να αναρωτηθεί κανείς: «Ποια μπορεί να είναι η φυσική σημασία μιας μιγαδικής κυματοσυνάρτησης μέσω της οποίας προσπαθούμε να περιγράψουμε ένα πραγματικό σωματίδιο»; Απάντηση στο ερώτημα δόθηκε λίγο αργότερα από τον M Born. Η ίδια η Ψ λοιπόν δεν έχει φυσική σημασία. Το μέγεθος που έχει σημασία είναι η $|\Psi|^2$ που ονομάζουμε **πυκνότητα πιθανότητας** (Υπενθύμιση: Εάν z ένας μιγαδικός αριθμός και z^* ο συζυγής του, τότε $|z|^2 = z \cdot z^*$). Συγκεκριμένα, η ποσότητα

$$P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 dx \quad (12)$$

αποτελεί την **πιθανότητα** να βρίσκεται το σωματίδιο στο διάστημα μεταξύ x και $x+dx$ τη χρονική στιγμή t .

5. Η Χρονικά Ανεξάρτητη Εξίσωση Schrödinger & η Κυματοσυνάρτηση ψ

Εάν η δυναμική ενέργεια U είναι ανεξάρτητη του χρόνου, τότε γράφουμε τη κυματοσυνάρτηση Ψ στη μορφή

$$\Psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(x) \quad (13)$$

και εισάγοντας τη μορφή αυτή στην (11) καταλήγουμε στη λεγόμενη χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (14)$$

όπου E η συνολική (μηχανική) ενέργεια του σωματιδίου. Από τη (13) είναι φανερό ότι $|\Psi| = |\psi|$ (διότι $|e^{-\frac{i}{\hbar}Et}| = 1$). Ακόμη, η (14) υποδηλώνει ότι η ψ μπορεί να είναι είτε πραγματική είτε φανταστική. Κατ' αντιστοιχία δε με τη (12), η ποσότητα

$$P(x) = |\psi(x)|^2 dx \quad (15)$$

αποτελεί την πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο στο διάστημα μεταξύ x και $x+dx$. (Ερώτηση: Ποιες είναι οι διαστάσεις της $|\psi|$;). Η κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$ και η πιθανότητα $P(x)$ είναι προφανώς ανεξάρτητες του χρόνου όπως και η U . Στην περίπτωση αυτή, η κατάσταση του σωματιδίου που περιγράφει η ψ ονομάζεται **στάσιμη κατάσταση**. Τα προβλήματα που θα εξετάσουμε εδώ αφορούν στάσιμες καταστάσεις.

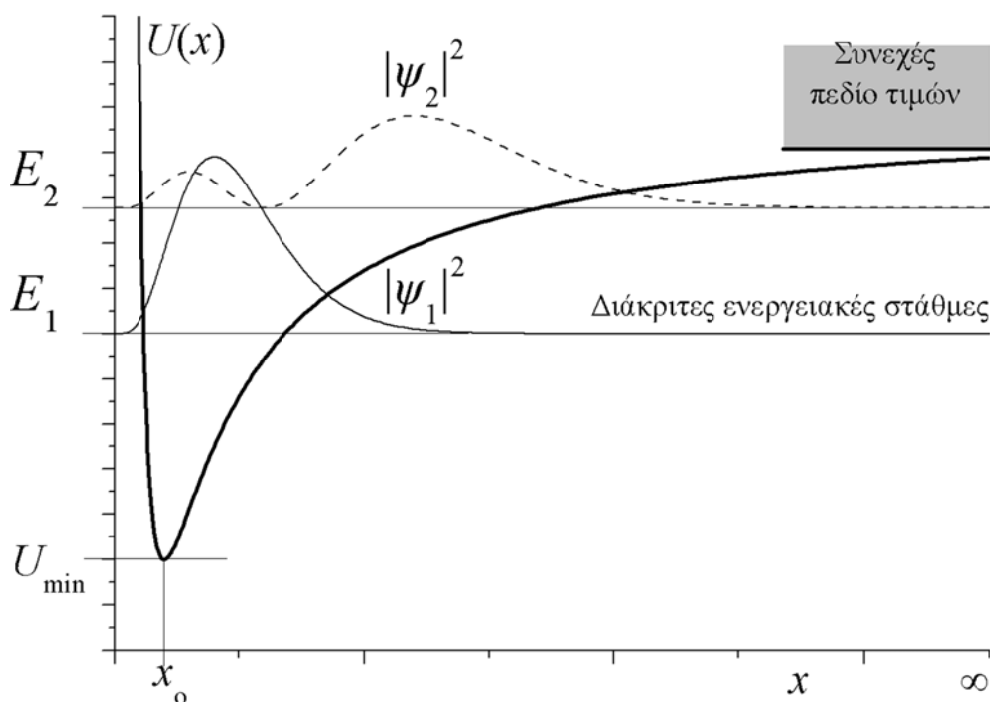
6. Οι ιδιότητες της ψ

Πρέπει να τονιστεί ότι επιλύοντας τη (14) λαμβάνουμε της γενική λύση της. Η εύρεση της ψ επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες που είναι κατάλληλες για το εκάστοτε πρόβλημα. Με άλλα λόγια, δεν είναι όλες οι λύσεις της (14) φυσικά παραδεκτές και η ψ , εφόσον σχετίζεται με πιθανότητες, θα πρέπει να υπακούει σε μια σειρά συνθηκών. Συγκεκριμένα,

- Η ψ θα πρέπει να είναι παντού πεπερασμένη (η πιθανότητα δεν απειρίζεται).
- Η ψ θα πρέπει να είναι μονότιμη (η πιθανότητα δεν μπορεί να έχει πάνω από μία τιμή για κάθε θέση).
- Η ψ θα πρέπει να είναι παντού ομαλή, τόσο η ίδια όσο και η πρώτη της παράγωγος, και να μην έχει ασυνέχειες («άλματα» πιθανότητας), ακόμη και εάν η δυναμική ενέργεια $U(x)$ παρουσιάζει ασυνέχειες.

6. Δέσιμες Καταστάσεις & Καταστάσεις του Συνεχούς

Θεωρήστε την καμπύλη της δυναμικής ενέργειας του Σχ. 1 (που έχει τη μορφή ενός πηγαδιού). Από τη λύση της (14) για την καμπύλη αυτή ή παρόμοιες προκύπτουν τα ακόλουθα γενικά συμπεράσματα:



Σχήμα 1.

(1) Για $E < U(x \rightarrow \infty)$ το σωματίδιο κινείται σε πεπερασμένο χώρο (φραγμένη κίνηση) και οι στάσιμες καταστάσεις του αντιστοιχούν σε ορισμένες *διάκριτες* τιμές ενέργειας $E_1, E_2, E_3, \dots$ (διάκριτο φάσμα ενεργειών, *κβάντωση ενέργειας*). Και τούτο διότι μόνο για αυτές τις τιμές η λύση της (14) παράγει φυσικά αποδεκτές κυματοσυναρτήσεις $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$, αυτές δηλαδή που προβλέπουν τη φραγμένη κίνηση του σωματιδίου (*δέσμιες καταστάσεις*) και δεν απειρίζονται. Για τις δέσμιες καταστάσεις η συνολική πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο κάπου στο διάστημα θέσεων x από το $-\infty$ έως το $+\infty$ (στη μονοδιάστατη περίπτωση που εξετάζουμε) είναι προφανώς μονάδα. Συνεπώς, θα πρέπει να ισχύει,

$$P_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (16)$$

Εφόσον το ολοκλήρωμα (16) δεν απειρίζεται η ψ ονομάζεται *τετραγωνικά ολοκληρώσιμη* και εάν είναι ίσο με τη μονάδα η ψ ονομάζεται και *κανονικοποιημένη*. Εάν το ολοκλήρωμα δεν είναι ίσο με τη μονάδα τότε η ψ πολλαπλασιάζεται με κατάλληλο παράγοντα ώστε η συνολική πιθανότητα να είναι ίση με 1. Εάν ενδιαφερόμαστε για την πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο σε κάποιο πεπερασμένο διάστημα $[a, b]$, τότε τα όρια του ολοκληρώματος $\pm\infty$ της (16) πρέπει να αντικατασταθούν από τα a και b . Ακόμη, μέσω της πιθανότητας $P(x)$ μπορούμε να βρούμε τη μέση τιμή οποιουδήποτε μεγέθους μας ενδιαφέρει. Π.χ. η μέση τιμή της θέσης x του σωματιδίου γράφεται,

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi(x)|^2 dx \quad (17)$$

και αντίστοιχα για οποιοδήποτε άλλο μέγεθος $f(x)$.

Σημειώστε ότι η ύπαρξη διάκριτων ενεργειακών τιμών για ένα πρόβλημα όπως αυτό δεν προβλέπεται από την Κλασική Μηχανική όπου το επιτρεπτό φάσμα ενεργειών στη φραγμένη περιοχή είναι συνεχές, αρκεί να ισχύει ότι $E \geq U_{\min}$ (διότι εάν ίσχυε $E < U_{\min}$, και εφόσον $E = U + K$, η κινητική ενέργεια θα ήταν αρνητική, $K < 0!$).

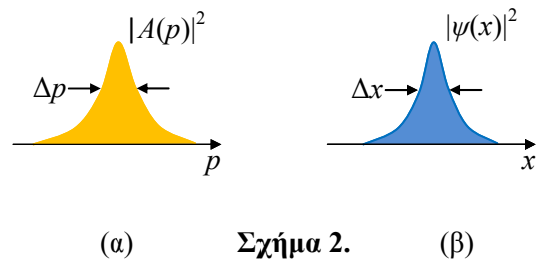
(2) Σύμφωνα λοιπόν με τη Κλασική Μηχανική, για δεδομένη ενέργεια E επιτρέπεται στο σωματίδιο να κινείται μόνο στις περιοχές του χώρου όπου η κινητική ενέργεια $K = E - U \geq 0$. Αντίθετα, στο Σχ. 1 βλέπουμε ότι οι πυκνότητες πιθανότητας $|\psi_i|^2$, δεν είναι, εν γένει, μηδενικές στις κλασικά απαγορευμένες περιοχές. Οι τιμές τους όμως μειώνονται *εκθετικά* καθώς προχωρούμε βαθύτερα στις περιοχές αυτές. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στον κυματικό χαρακτήρα της κίνησης του σωματιδίου και εξηγείται μέσω της αρχής της Απροσδιοριστίας, όπως θα δούμε αναλυτικότερα παρακάτω.

(3) Μέσω της λύσης της εξίσωσης Schrödinger αποδεικνύεται ότι η χαμηλότερη δυνατή διάκριτη ενέργεια (η, αλλιώς, *ενέργεια μηδενικού σημείου*, που αντιστοιχεί στη λεγόμενη *θεμελιώδη κατάσταση*) είναι πάντα μεγαλύτερη από την ελάχιστη δυναμική, $E_1 > U_{\min}$. Αυτό έχει ήδη συζητηθεί και αποδειχθεί στα πλαίσια της Αρχής της Απροσδιοριστίας όπου καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι *τα κβαντικά σωματίδια δεν πέφτουν ποτέ στον πυθμένα του πηγαδιού και δεν είναι ποτέ ακίνητα*. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η Αρχή της Αβεβαιότητας είναι «ενσωματωμένη» στην εξίσωση Schrödinger.

(4) Για $E > U(x \rightarrow \infty)$ το σωματίδιο δεν περιορίζεται σε πεπερασμένο χώρο (αν και κλασικά απαγορευμένες περιοχές του χώρου μπορεί να υπάρχουν και σε αυτή την περίπτωση). Η κίνησή του είναι λοιπόν δεν είναι φραγμένη, το σωματίδιο μπορεί να διαφύγει και οι στάσιμες καταστάσεις του έχουν συνεχές φάσμα ενεργειών όπως και στην Κλασική Μηχανική. Οι καταστάσεις αυτές ονομάζονται **καταστάσεις του συνεχούς**, και τα αντίστοιχα προβλήματα ονομάζονται προβλήματα **σκέδασης**. Η κανονικοποίηση στα προβλήματα σκέδασης είναι περιπλοκότερη από ότι στα προβλήματα δέσμιων καταστάσεων. Π.χ. το απλό αρμονικό κύμα $\exp(ipx/\hbar)$, ενώ είναι παντού πεπερασμένο, δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμο (το ολοκλήρωμα της (16) απειρίζεται), γεγονός που αντανάκλα το ότι αποτελεί απλουστευμένη και όχι ρεαλιστική περιγραφή του ελεύθερου σωματιδίου. Οι υπερθέσεις αρμονικών κυμάτων διαφορετικών ορμών όμως, όπου η κυματοσυνάρτηση μπορεί να γραφεί ως,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(p) e^{i \frac{p}{\hbar} x} dp \quad (18)$$

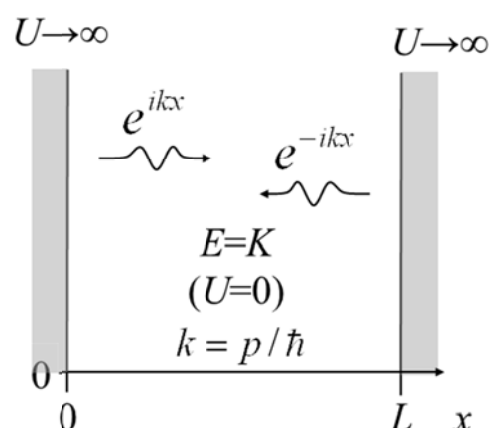
μπορούν να κανονικοποιηθούν μέσω της (16). Στο Σχ. 2(α) φαίνεται η κατανομή του (τετραγωνισμένου) πλάτους του κάθε αρμονικού κύματος ορμής p . Η κατανομή έχει εύρος Δp . Η $|\psi(x)|^2$ φαίνεται στο Σχ. 2(β) και είναι εντοπισμένη σε μια περιοχή Δx . Οι αβεβαιότητες Δp και Δx συνδέονται μέσω της Αρχής της Απροσδιοριστίας.



Στη συνέχεια της ενότητας αυτής θα παρουσιάσουμε μερικά παραδείγματα εφαρμογής των παραπάνω με δυναμικές ενέργειες της μορφής απλών *τετραγωνικών*, όπως ονομάζονται, δυναμικών ενεργειών.

7. Σωματίδιο Εγκλωβισμένο σε Αδιαπέραστο (Απείρου Ύψους) Τετραγωνικό Πηγάδι

Το πρόβλημα τίθεται ως εξής: Σωματίδιο είναι εγκλωβισμένο σε μια περιοχή μήκους L . Εντός της περιοχής αυτής η δυναμική του ενέργεια είναι μηδενική ενώ στα άκρα της είναι άπειρη και το σωματίδιο δεν μπορεί να διαφύγει. Μας ζητείται να βρούμε τις επιτρεπτά ενεργειακά επίπεδα και τις κυματοσυναρτήσεις των καταστάσεων του σωματιδίου. Αν και σχετικά απλοϊκό, το μοντέλο αυτό περιγράφει προσεγγιστικά τον εγκλωβισμό των ηλεκτρονίων της ζώνης σθένους κατά τη μελέτη της ηλεκτρικής αγωγιμότητας των μετάλλων. Μπορούμε να περιγράψουμε την προς τα δεξιά και προς τα αριστερά κίνηση του σωματιδίου μέσω δύο τρεχόντων κυμάτων de Broglie (Σχ. 3). Η υπέρθεση των δύο κυμάτων δημιουργεί ένα στάσιμο κύμα, με τα όρια του «κουτιού» να αποτελούν ακλόνητα σημεία (κόμβους). Συνεπώς το μήκος του «κουτιού» πρέπει να αντιστοιχεί σε ακέραιο αριθμό ημικυμάτων και η συνθήκη αυτή οδηγεί στις επιτρεπτές



Σχήμα 3.

τιδίου μέσω δύο τρεχόντων κυμάτων de Broglie (Σχ. 3). Η υπέρθεση των δύο κυμάτων δημιουργεί ένα στάσιμο κύμα, με τα όρια του «κουτιού» να αποτελούν ακλόνητα σημεία (κόμβους). Συνεπώς το μήκος του «κουτιού» πρέπει να αντιστοιχεί σε ακέραιο αριθμό ημικυμάτων και η συνθήκη αυτή οδηγεί στις επιτρεπτές

ενέργειες του σωματιδίου. Η αυστηρή κβαντομηχανική περιγραφή του προβλήματος, με την οποία θα ασχοληθούμε εδώ, επιβεβαιώνει την παραπάνω εικόνα. Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι η δυναμική ενέργεια δεν εξαρτάται από το χρόνο. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν την χρονικά ανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger, σχέση (14). Στην περιοχή $0 \leq x \leq L$ όπου μπορεί να κινηθεί το σωματίδιο η εξίσωση αυτή γράφεται ως (με $U=0$),

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \quad (19)$$

και όπως μπορείτε να επιβεβαιώσετε και μόνοι σας η γενική της λύση γράφεται ως,

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (20)$$

με

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p}{\hbar} \quad (21)$$

το γνωστό μας κυματάρτιο. Εφαρμόζουμε τώρα τις κατάλληλες *οριακές συνθήκες*: Μηδενική πιθανότητα εύρεσης του σωματιδίου έξω από το διάστημα $0 \leq x \leq L$ σημαίνει ότι,

$$\psi(0) = \psi(L) = 0. \quad (22)$$

Για $x=0$ έχουμε ότι ($e^{i0} = 1$),

$$\psi(0) = A + B = 0 \rightarrow B = -A \quad (23)$$

οπότε η (20) απλοποιείται και γράφεται ως,

$$\psi(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) = 2iA \sin(kx), \quad (24)$$

όπου για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό (4). Από τη δεύτερη οριακή συνθήκη για $x=L$ έχουμε ότι,

$$\psi(L) = 2iA \sin(kL) = 0 \rightarrow k_n L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

από όπου, χρησιμοποιώντας την (21) και λύνοντας ως προς E , βρίσκουμε τις επιτρεπτές ενέργειες του σωματιδίου,

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2 = E_1 n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

και, την ίδια στιγμή, τις κυματοσυναρτήσεις που τους αντιστοιχούν,

$$\psi_n(x) = 2iA \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right). \quad (27)$$

Το μόνο που απομένει είναι η εύρεση του παράγοντα A , ο οποίος θα βρεθεί από την κανονικοποίηση της εκάστοτε κυματοσυναρτήσεως. Η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο στο διάστημα μεταξύ x και $x+dx$ γράφεται ως $P_n(x) = |\psi_n(x)|^2 dx = 4|A|^2 \sin^2(n\pi x/L) dx$. Η συνολική πιθανότητα να βρίσκεται στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ (στην πραγματικότητα στο διάστημα $0 \leq x \leq L$ μια και έξω από αυτό η πιθανότητα είναι μηδενική) θα πρέπει να είναι ίση με τη μονάδα,

$$\int_0^L P_n(x) dx = 4|A|^2 \int_0^L \sin^2\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx = 1. \quad (28)$$

Λύνοντας το ολοκλήρωμα, βρίσκουμε ότι,

$$4|A|^2 \frac{L}{2} = 1 \rightarrow |A| = \frac{1}{\sqrt{2L}} \quad (29)$$

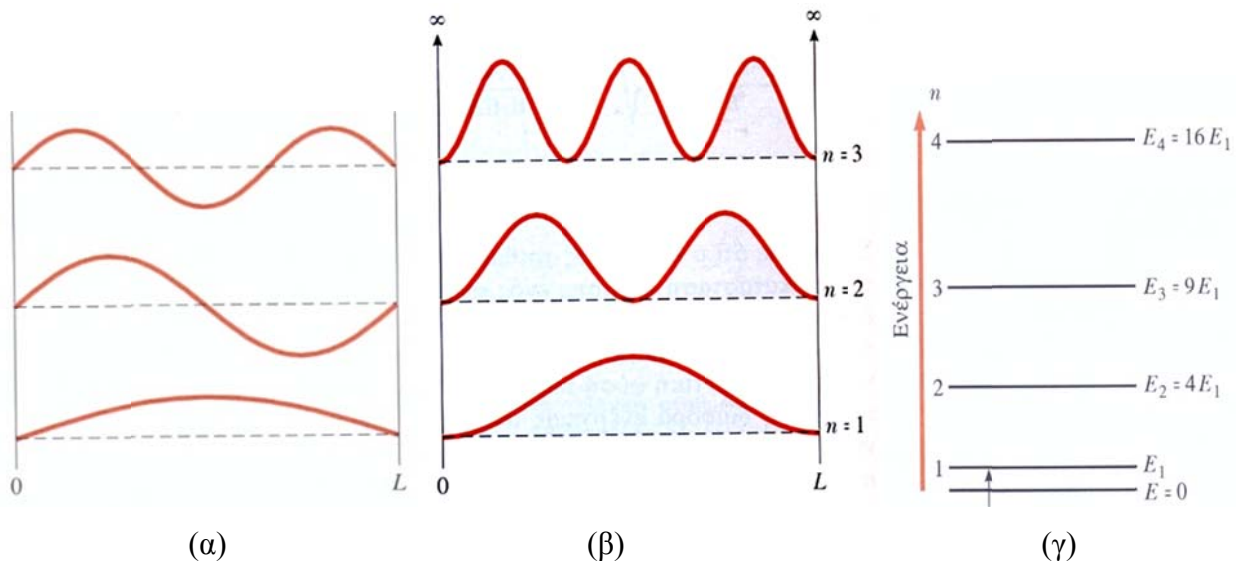
Παρατηρούμε ότι βρήκαμε μόνο το μέτρο του παράγοντα A και ότι μέσω της κατάλληλης επιλογής του έχουμε τη δυνατότητα (όπως αναφέραμε προηγουμένως) να επιλέξουμε εάν η κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$ θα είναι πραγματική (μιγαδικός A) ή μιγαδική (πραγματικός A). Για να έχουμε πραγματική κυματοσυνάρτηση μια καλή επιλογή είναι $A = -i/\sqrt{2L}$, οπότε βρίσκουμε,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right). \quad (30)$$

Φυσικά, η επιλογή του A δεν έχει στην πραγματικότητα σημασία (αρκεί να ισχύει η (29)) μια και η πιθανότητα $P_n(x)$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής αυτής και γράφεται ως,

$$P_n(x) = \frac{2}{L} \sin^2\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

Γραφήματα μερικών κυματοσυναρτήσεων $\psi_n(x)$, πυκνοτήτων πιθανότητας, $|\psi_n(x)|^2$, και ενεργειακών επιπέδων E_n , φαίνονται στα Σχ. 4(α)-(γ), αντίστοιχα. Από το Σχ. (4α) είναι φανερό ότι οι κυματοσυναρτήσεις $\psi_n(x)$ έχουν πράγματι τη μορφή στασίμων κυμάτων όπως θα περιμέναμε από την περιγραφή μέσω κυμάτων



Σχήμα 4.

de Broglie. Οι κυματοσυναρτήσεις και οι πυκνότητες πιθανότητας μηδενίζονται σε κάποια σημεία στο εσωτερικό του «κουτιού», δηλαδή προβλέπεται ότι στην περιοχή αυτών των δεσμών έχουμε μηδενική πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο. Εξαιρώντας τους δεσμούς στα άκρα του «κουτιού», ο αριθμός των υπόλοιπων δεσμών αυξάνεται όσο αυξάνει ο **κβαντικός αριθμός** n . Για τη θεμελιώδη κατάσταση ($n=1$) δεν έχουμε κανένα δεσμό, για την πρώτη διεγερμένη ($n=2$) έναν δεσμό, για της δεύτερη διεγερμένη ($n=3$) δύο δεσμούς, κλπ. Αυτό είναι γενικότερο χαρακτηριστικό της φραγμένης κίνησης ενός σωματιδίου.

Παρατηρήστε ότι η ελάχιστη ενέργεια που μπορεί να έχει το σωματίδιο,

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} > 0 \quad (32)$$

είναι μεγαλύτερη του μηδενός, όπως και θα το περιμέναμε από την Αρχή της Αβεβαιότητας (τα κβαντικά σωματίδια δεν πέφτουν ποτέ στον πυθμένα του πηγαδιού και δεν είναι ποτέ ακίνητα). Αυτός είναι και ο λόγος όπου η ελάχιστη τιμή του κβαντικού αριθμού n είναι 1 και όχι 0. Η τιμή $n=0$ δεν είναι αποδεκτή, εφόσον για αυτή η (31) θα προέβλεπε παντού μηδενική πιθανότητα εύρεσης του σωματιδίου στο διάστημα $0 \leq x \leq L$. Πέρα από τους αριθμητικούς παράγοντες, η (32) μας λέει ότι η ελάχιστη ενέργεια προκύπτει από τη σύγκριση της μάζας του σωματιδίου και του μήκους της περιοχής εγκλωβισμού του ως προς την καθαρά κβαντικής προέλευσης σταθερά $\hbar$. Η σύγκριση αυτή απαντάει στο ερώτημα «γιατί τα μακροσκοπικά σωματίδια δεν εμφανίζουν κβαντική συμπεριφορά;». Και αυτό διότι στην Κλασική Φυσική, που περιγράφει πολύ καλά τα μακροσκοπικά σώματα, δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα εάν, για τη δυναμική ενέργεια του προβλήματός μας, τα σώματα αυτά έχουν μηδενική ενέργεια. Για να αντιληφθούμε το γεγονός ότι τα παραπάνω κβαντικά αποτελέσματα δεν έρχονται σε αντίθεση με την καθημερινή μας εμπειρία, θεωρήστε ένα σώμα μάζας $m=1$ gr εγκλωβισμένο σε ένα «κουτί» μήκους $L=1$ cm. Τότε έχουμε ότι $E_1=5.5 \times 10^{-58}$ J που αντιστοιχεί σε ταχύτητα $v_1=3.3 \times 10^{-36}$ m/sec. Συνεπώς, ο χρόνος που θα χρειαζόταν το σώμα για να διανύσει την απόσταση L θα ήταν ίσος με 3×10^{23} sec, δηλαδή ένα εκατομμύριο φορές μεγαλύτερος από την ηλικία του σύμπαντος. Καταλαβαίνετε ότι η E_1 είναι εδώ πρακτικά μηδενική και ότι η παράθεση των δεδομένων αυτών είναι ένας άλλος τρόπος για να πούμε ... «ακίνητο».

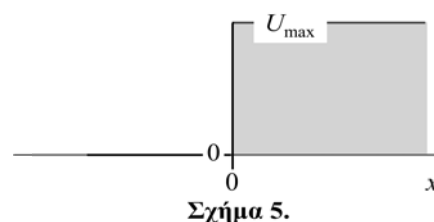
Ας εξετάσουμε τέλος, και το άλλο «σημείο τριβής» μεταξύ Κλασικής και Κβαντικής Μηχανικής που ακούει στο όνομα «κβάντωση (διακριτοποίηση) της ενέργειας». Όπως είναι γνωστό, η Κλασική Φυσική επιτρέπει στο σωματίδιο να έχει συνεχές πεδίο ενεργειακών τιμών, σε αντίθεση με τη σχέση (16) όπου προβλέπονται μόνο κάποιες διάκριτες επιτρεπτές ενεργειακές τιμές. Απάντηση στο θέμα αυτό, δίνει η **Αρχή της Αντιστοιχίας** που διατυπώθηκε από το N Bohr το 1922 και λέει ότι : «*Το κλασικό όριο είναι το όριο των μεγάλων κβαντικών αριθμών. Στο όριο αυτό οι κβαντικές και οι κλασικές προβλέψεις πρέπει να συμπίπτουν...*» Παρόλο λοιπόν που η (16) προβλέπει ότι οι ενέργειες των επιπέδων αυξάνουν ανάλογα του n^2 , για μεγάλους κβαντικούς αριθμούς η *σχετική αύξηση*,

$$\frac{\Delta E_{n+1,n}}{E_n} = \frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} = \frac{E_1[(n+1)^2 - n^2]}{E_1 n^2} = \frac{2n+1}{n^2} \xrightarrow{n \gg 1} \frac{2}{n} \quad (33)$$

μειώνεται ($\propto 1/n$) και τα επίπεδα πλησιάζουν τόσο πολύ, που πλέον διαμορφώνουν ένα συνεχές πεδίο επιτρεπτών ενεργειακών τιμών (όπως προβλέπεται από την Κλασική Φυσική).

8. Ανακλαστικότητα και Διαπερατότητα σε ένα Σκαλοπάτι Δυναμικού

Περνάμε τώρα σε ένα πρόβλημα σκέδασης. Θεωρήστε το φράγμα δυναμικού με τη μορφή σκαλοπατιού του Σχ. 5, όπου η δυναμική ενέργεια είναι μηδενική για $x < 0$ και έχει μια σταθερή τιμή $U_{\max} > 0$ για $x \geq 0$. Θεωρήστε επίσης ότι σωματίδιο μάζας m πλησιάζει το φράγμα από τα αριστερά στο σχήμα. Στη φύση εμφανίζονται συχνά τέτοια προβλήματα αλλά η δυναμική ενέργεια δεν είναι, εν γένει, ασυνεχής όπως εδώ (στο σημείο

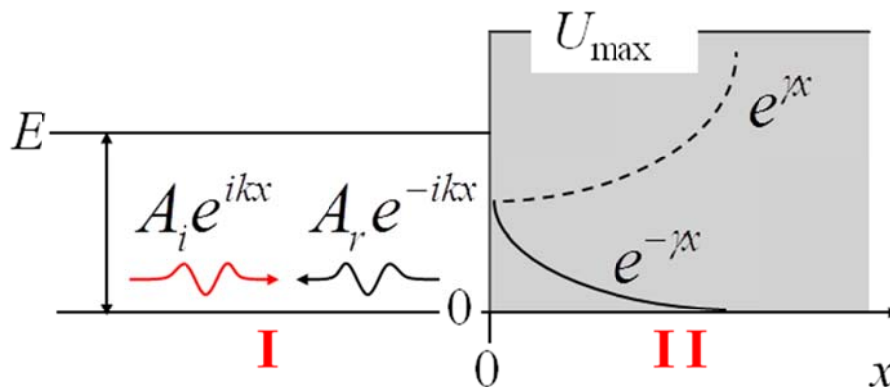


Σχήμα 5.

$x=0$). Επιλέγουμε όμως να ασχοληθούμε με αυτή την ασυνεχή μορφή γιατί προσφέρει σχετικά απλές αναλυτικές λύσεις που μας βοηθούν να κατανοήσουμε καλύτερα μερικές ιδιαιτερότητες της κβαντικής περιγραφής. Όπως έχουμε πει, στα προβλήματα σκέδασης δεν έχουμε διακριτοποίηση της ενέργειας. Στην πραγματικότητα στα προβλήματα αυτά την ενέργεια την προεπιλέγουμε. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η συμπεριφορά του σωματιδίου (και η κυματοσυνάρτησή του) εξαρτάται από τη τιμή της ενέργειάς του $E \geq 0$ σε σχέση με το ύψος του φράγματος. Παρακάτω θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $E < U_{\max}$ και $E > U_{\max}$.

8.1 Η Περίπτωση $E < U_{\max}$

Η ασυνέχεια της δυναμικής ενέργειας στο σημείο $x=0$ μας αναγκάζει να λύσουμε ξεχωριστά την εξίσωση Schrödinger στις περιοχές I και II του Σχ. 6. Στην περιοχή I η εξίσωση γράφεται, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, ως



Σχήμα 6.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_I(x)}{dx^2} = E \psi_I(x) \quad (34)$$

με γενική λύση,

$$\psi_I(x) = A_i e^{ikx} + A_r e^{-ikx} \quad (36)$$

και

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (36)$$

Η (36) αποτελείται από δύο κύματα (de Broglie), ένα που οδεύει από τα αριστερά προς τα δεξιά (εισερχόμενο κύμα) και ένα που οδεύει από τα δεξιά προς τα αριστερά (ανακλώμενο κύμα) με αντίστοιχα πλάτη A_i (i: incident-εισερχόμενο) και A_r (r: reflected-ανακλώμενο). Όπως και η ενέργεια E , το πλάτος A_i θεωρείται και αυτό γνωστό μέγεθος, μια και συμβολίζει μία πειραματικά ελεγχόμενη και προεπιλεγμένη ροή εισερχόμενων σωματιδίων.

Στην περιοχή II τώρα η εξίσωση Schrödinger γράφεται ως,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{II}(x)}{dx^2} + U_{\max} \psi_{II}(x) = E \psi_{II}(x) \quad (37)$$

και η οποία, για $E < U_{\max}$, έχει γενική λύση,

$$\psi_{II}(x) = B_+ e^{\gamma x} + B_- e^{-\gamma x} \quad (38)$$

με το συντελεστή γ να γράφεται ως,

$$\gamma = \frac{\sqrt{2m(U_{\max} - E)}}{\hbar}. \quad (39)$$

Παρατηρούμε ότι η (38) αποτελείται από δύο εκθετικούς όρους, εκ των οποίων ο ένας ($e^{-\gamma x}$) μειώνεται εκθετικά και πρακτικά μηδενίζεται καθώς το $x \geq 0$ αυξάνει και ο άλλος ($e^{\gamma x}$) αυξάνεται εκθετικά και τείνει προς το άπειρο για πολύ μεγάλες τιμές του x . Συνεπώς, για είναι η $\psi_{\text{II}}(x)$ παντού πεπερασμένη (η πιθανότητα δεν μπορεί να απειρίζεται, κοίτα τις ιδιότητες της ψ παραπάνω) θα πρέπει να επιλέξουμε, βάσει της φυσικής του προβλήματός μας, το συντελεστή $B_+ = 0$. Επακόλουθα, η κυματοσυνάρτηση της περιοχής II γράφεται,

$$\psi_{\text{II}}(x) = B_- e^{-\gamma x} \quad (40)$$

Πάλι από τις ιδιότητες της ψ , γνωρίζουμε ότι «τόσο η ψ όσο και η πρώτη της παράγωγος θα πρέπει να είναι παντού ομαλές ακόμη και εάν η δυναμική ενέργεια $U(x)$ παρουσιάζει ασυνέχειες». Αυτή η πρόταση οδηγεί στις δύο παρακάτω συνθήκες για το σημείο $x=0$,

$$\psi_{\text{I}}(0) = \psi_{\text{II}}(0) \quad (41\alpha)$$

και

$$\left. \frac{d\psi_{\text{I}}(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi_{\text{II}}(x)}{dx} \right|_{x=0} \quad (41\beta)$$

Χρησιμοποιώντας τις (36) και (40) στη (41α) βρίσκουμε ότι,

$$A_{\text{I}} + A_{\text{r}} = B_- \quad (42\alpha)$$

ενώ παραγωγίζοντάς τες ως προς x ($d\psi_{\text{I}}/dx = ik(A_{\text{I}}e^{ikx} - A_{\text{r}}e^{-ikx})$ και $d\psi_{\text{II}}/dx = -\gamma B_- e^{-\gamma x}$) και θέτοντας στη συνέχεια $x=0$ καταλήγουμε στη σχέση,

$$ik(A_{\text{I}} - A_{\text{r}}) = -\gamma B_- \quad (42\beta)$$

Οι σχέσεις (42α,β) αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τους συντελεστές A_{r} και B_- , που μπορούν συνεπώς να εκφραστούν τώρα συναρτήσει των γνωστών μεγεθών, A_{I} , k και γ . Το τελικό αποτέλεσμα γράφεται ως,

$$\frac{A_{\text{r}}}{A_{\text{I}}} = \frac{k - i\gamma}{k + i\gamma}. \quad (43\alpha)$$

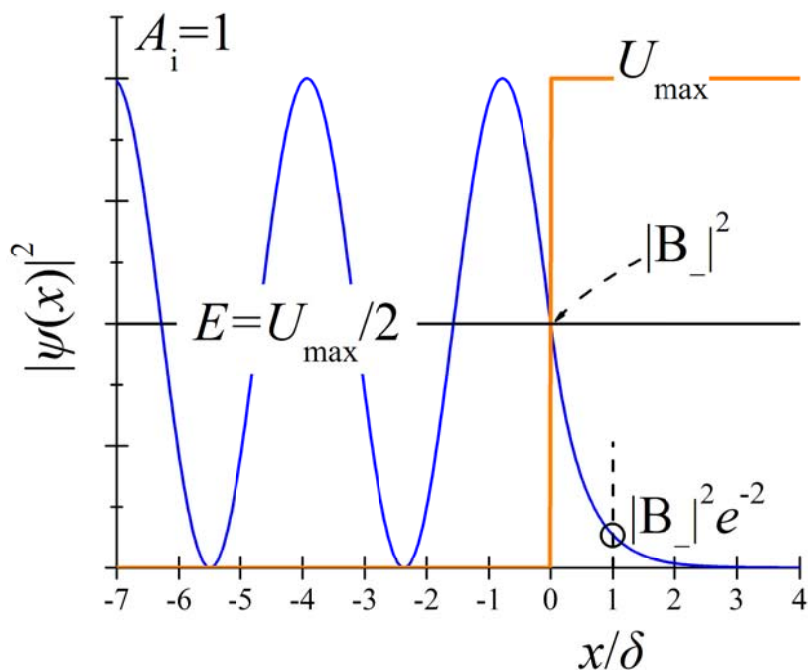
και

$$\frac{B_-}{A_{\text{I}}} = \frac{2k}{k + i\gamma}. \quad (43\beta)$$

Στο πρόβλημα σκέδασης που εξετάζουμε εδώ μας ενδιαφέρει να βρούμε τη πιθανότητα ανάκλασης του σωματιδίου προς τα αριστερά. Η πιθανότητα αυτή εκφράζεται μέσω του συντελεστή ανάκλασης,

$$R \equiv \left| \frac{A_{\text{r}}}{A_{\text{I}}} \right|^2 = 1 \quad (44)$$

ο οποίος, χρησιμοποιώντας τη (43α), αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι ίσος με τη μονάδα για κάθε τιμή της ενέργειας $E < U_{\max}$. Συνεπώς, το σωματίδιο θα ανακλαστεί οπωσδήποτε. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί απόλυτα με την κλασική πρόβλεψη. Η πυκνότητα πιθανότητας $|\psi|^2$ για την περίπτωση $E = U_{\max}/2$ και τον A_i αυθαίρετα επιλεγμένο να είναι ίσος με τη μονάδα, φαίνεται στο Σχ. 7. Για $x < 0$ η πυκνότητα πιθανότητας έχει τη μορφή στασίμου κύματος που δημιουργείται από την υπέρθεση των δύο αντίθετα διαδιδόμενων κυμάτων de Broglie. Η



Σχήμα 7.

ουσιώδης διαφορά με την κλασική πρόβλεψη εμφανίζεται στην περιοχή $x > 0$. Κλασικά, η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στην περιοχή αυτή είναι ακριβώς μηδέν μια και $K = E - U_{\max} < 0$. Για το λόγο αυτό η περιοχή $x > 0$ είναι κλασικά απαγορευμένη. Κβαντικά όμως, παρ' όλο που η πυκνότητα πιθανότητας $|\psi_{II}(x)|^2$ φθίνει εκθετικά, υπάρχει μια μικρή περιοχή που θα ονομάσουμε **μήκος διείσδυσης** και θα συμβολίσουμε με δ , όπου η πιθανότητα να βρεθεί εκεί το σωματίδιο είναι μη-μηδενική. Ο ορισμός του μήκους διείσδυσης είναι κάπως αυθαίρετος. Συνήθως γράφουμε,

$$|\psi_{II}(x)|^2 = |B_-|^2 e^{-2\gamma x} = |B_-|^2 e^{-2\frac{x}{\delta}} \quad (45)$$

από όπου,

$$\delta \equiv \frac{1}{\gamma} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_{\max} - E)}}. \quad (46)$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό (46), το μήκος διείσδυσης είναι η απόσταση όπου η $|\psi_{II}(x)|^2$ έχει μειωθεί σε σχέση με την αρχική τιμή της στο $x=0$ κατά τον παράγοντα e^{-2} ($|\psi_{II}(\delta)|^2/|\psi_{II}(0)|^2 = e^{-2}$). Όλα αυτά μπορούν να γίνουν κατανοητά μέσω του Σχ. 7 όπου η θέση x είναι εκφρασμένη σε μήκη διείσδυσης. Η σχέση (46) μας λέει ότι το μήκος διείσδυσης μεγαλώνει όσο μικραίνει η μάζα του σωματιδίου (τα ελαφριά σωματίδια είναι “πιο κβαντικά” από τα βαριά) και όσο η E πλησιάζει (εκ των κάτω) το ύψος του σκαλοπατιού $U_{\max}$. Στο σημείο αυτό θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς «...γιατί στο προηγούμενο παράδειγμα του πηγαδιού απείρου ύψους η κυματοσυνάρτηση είναι ακριβώς μηδέν στα άκρα της περιοχής εγκλωβισμού;» (σχέση (22)). Ο λόγος λοιπόν που συμβαίνει αυτό είναι η υπόθεση ότι $U_{\max} \rightarrow \infty$, οπότε και η (46) προβλέπει ότι $\delta \rightarrow 0$ και το σωματίδιο δε διεισδύει καθόλου στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή.

Τα παραπάνω ξεφεύγουν από την καθημερινή μας εμπειρία για τη συμπεριφορά των σωματιδίων και για το λόγο αυτό μας ξενίζουν. Ας δούμε όμως τι λέει η Αρχή της Απροσδιοριστίας για το θέμα αυτό. Ξεκι-

νάμε με την εύλογη απαίτηση ότι μια μέτρηση ικανή να εντοπίσει το σωματίδιο στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή πρέπει να έχει αβεβαιότητα θέσης μικρότερη ή το πολύ ίση με το μήκος διεύθυνσης:

$$\Delta x \leq \delta. \quad (47)$$

Συνεπώς, από την Αρχή της Αβεβαιότητας ($\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$) για την αβεβαιότητα της ορμής θα έχουμε,

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\delta} = \sqrt{2m(U_{\max} - E)} \quad (48)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη (46). Επίσης, η αβεβαιότητα της ορμής θα πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την ίδια τη ορμή του σωματιδίου,

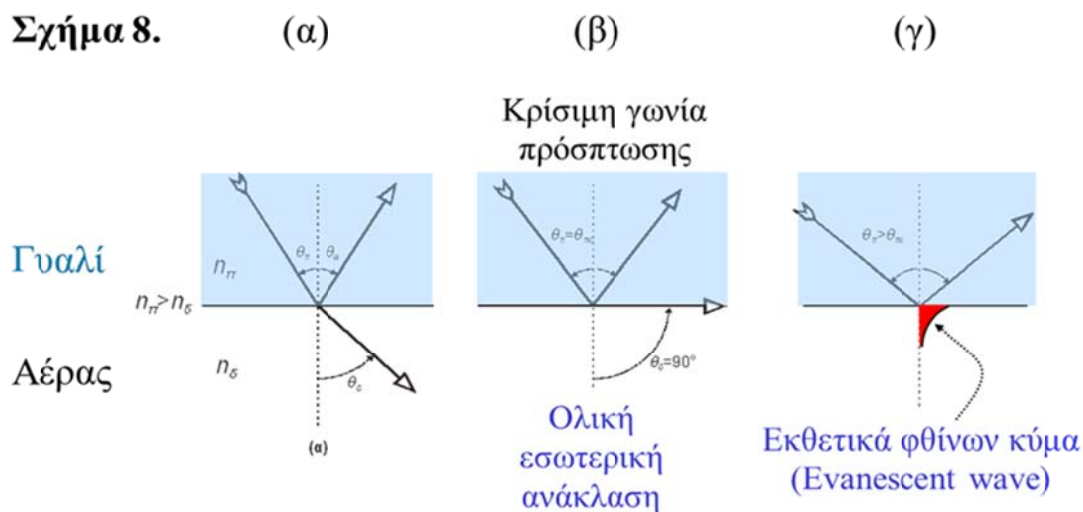
$$\Delta p \leq p. \quad (49)$$

Άρα, για την κινητική ενέργεια θα ισχύει (μη-σχετικιστικό σωματίδιο) ότι,

$$K = \frac{p^2}{2m} \geq \frac{\Delta p^2}{2m} \geq U_{\max} - E \quad (50)$$

όπου τώρα έγινε χρήση της (48). Η (50) λέει ότι μετά από μία μέτρηση ικανή να εντοπίσει το σωματίδιο στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή, η ενέργειά του θα διαταραχθεί κατά ποσό μεγαλύτερο από αυτό που απαιτείται (δηλαδή, $U_{\max} - E$) ώστε το σωματίδιο να υπερβεί το σκαλοπάτι δυναμικής ενέργειας!

Εάν τέλος, ακόμη και η παραπάνω συζήτηση δεν σας έχει πείσει, τότε ίσως αυτό το καταφέρει ένα κλασικό ανάλογο! Διότι, πράγματι, κάτι τέτοιο υπάρχει, όχι όμως για τα σωματίδια αλλά για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (το φως). Είναι λοιπόν γνωστό από την Οπτική ότι κατά τη διάθλαση μια φωτεινής δέσμης



υπάρχει πάντα και ένα ποσοστό φωτεινής ισχύος που ανακλάται. Ακόμη, κατά τη διάθλαση από οπτικά πυκνότερο σε οπτικά αραιότερο μέσο (π.χ. από το γυαλί στον αέρα) η διαθλώμενη δέσμη απομακρύνεται από την κάθετο στο σημείο πρόσπτωσης (Σχ. 8(α)). Υπάρχει κάποια (κρίσιμη) γωνία πρόσπτωσης για την οποία η γωνία διάθλασης είναι 90° και η διαθλώμενη δέσμη διαδίδεται παράλληλα στη μεσεπιφάνεια γυαλιού-αέρα (Σχ. 8(β)). Φυσικά, υπάρχει και η ανακλώμενη δέσμη που υπακούει στο νόμο της ανάκλασης. Εάν η γωνία πρόσπτωσης γίνει μεγαλύτερη της κρίσιμης γωνίας, δεν υπάρχει καθόλου διάθλαση και το σύνολο της φωτεινής ισχύος ανακλάται (ολική εσωτερική ανάκλαση). Αυτά είναι γνωστά και προβλέπονται και από τη Γεωμετρική Οπτική. Μία αυστηρή λύση του προβλήματος όμως βασισμένη στην Κυματική Οπτική (εξισώσεις Maxwell) αποδεικνύει ότι, ναι μεν όλη η φωτεινή ισχύς ανακλάται, υπάρχει δε και ένα *εκθετικά φθίνων* κύ-

μα (*evanescent wave*) το οποίο διεισδύει στον αέρα (Σχ. 8(γ)). Στη περίπτωση αυτή λοιπόν, το φως διεισδύει στην «απαγορευμένη» περιοχή αλλά δεν διαδίδεται. Έχοντας αυτά υπ' όψη, μπορούμε να καταλάβουμε ότι στην περίπτωση του σωματιδίου που εξετάζουμε εδώ, η διείσδυση στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή αντανakλά την κυματική φύση του.

8.2 Η Περίπτωση $E > U_{\max}$

Και σε αυτή την περίπτωση πρέπει να λύσουμε την εξίσωση Schrödinger στις δύο περιοχές I και II. Στην περιοχή I έχουμε όπως και πριν,

$$\psi_I(x) = A_i e^{ik_I x} + A_r e^{-ik_I x} \quad (51)$$

όπου μετονομάσαμε τον κυματάριθμο από k σε k_I ,

$$k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (52)$$

για να το διαφοροποιήσουμε από τον

αντίστοιχο κυματάριθμο k_{II} που εμφανίζεται στη γενική λύση της εξίσωσης Schrödinger στην περιοχή II,

$$\psi_{II}(x) = A_t e^{ik_{II} x} + C e^{-ik_{II} x} \quad (53)$$

$$k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E - U_{\max})}}{\hbar}. \quad (54)$$

Η γενική λύση (53) περιέχει δύο κύματα που οδεύουν προς διαφορετικές κατευθύνσεις. Εφόσον όμως, η, εξ υποθέσεως, αρχική συνθήκη μας είναι ότι το σωματίδιο έρχεται από τα αριστερά, στην περιοχή II δεν μπορεί να υπάρχει κύμα που οδεύει προς τα αριστερά. Συνεπώς θέτουμε $C=0$ στην (53) που τώρα γράφεται ως,

$$\psi_{II}(x) = A_t e^{ik_{II} x}. \quad (55)$$

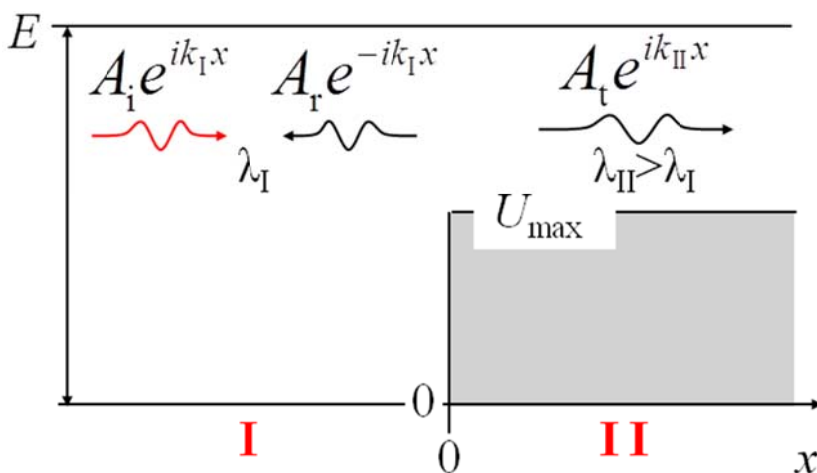
Στη συνέχεια, όπως και προηγουμένως, θα χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες (41α,β) για προσδιορίσουμε τους συντελεστές A_r και A_t συναρτήσει των γνωστών μεγεθών A_i , k_I και k_{II} . Εκφράζοντας το τελικό αποτέλεσμα μέσω των συντελεστών ανάκλασης R και διέλευσης T , έχουμε ότι,

$$R \equiv \left| \frac{A_r}{A_i} \right|^2 = \frac{(k_I - k_{II})^2}{(k_I + k_{II})^2} \quad (56)$$

και

$$T \equiv \left| \frac{A_t}{A_i} \right|^2 = \frac{4k_I k_{II}}{(k_I + k_{II})^2}. \quad (57)$$

Οι συντελεστές R και T συνδέονται (όπως μπορείτε να επιβεβαιώσετε και μόνοι σας χρησιμοποιώντας τις (56) και (57)) μέσω της σχέσης,

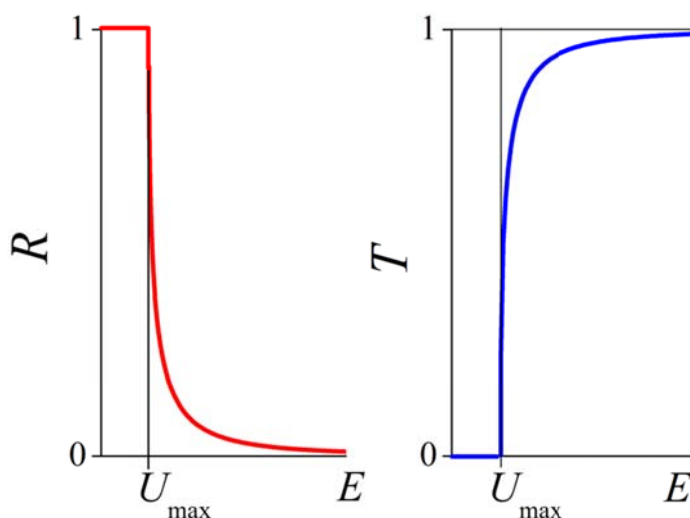


Σχήμα 9.

$$R+T=1 \quad (58)$$

που δηλώνει το προφανές, ότι δηλαδή το από αριστερά εισερχόμενο σωματίδιο είτε θα ανακλαστεί είτε θα διέλθει. Κβαντικά λοιπόν, προβλέπεται ότι ο συντελεστής ανάκλασης δεν είναι μηδενικός. Υπάρχει συνεπώς πιθανότητα το σωματίδιο να ανακλαστεί, ακόμη και όταν ενεργειακά του επιτρέπεται να διέλθει. Αυτό έρχεται επίσης σε πλήρη αντίθεση με την κλασική πρόβλεψη, σύμφωνα με την οποία το σωματίδιο θα έπρεπε να διέλθει οπωσδήποτε ($R=0$, $T=1$). Εάν αναρωτιέστε γιατί δε θέσαμε από την αρχή $A_r=0$ στην (51) ώστε να αποκλείσουμε τη δυνατότητα ανάκλασης, λίγες πράξεις θα σας πείσουν ότι οι συνθήκες (41α,β) οδηγούν στην περίπτωση αυτή σε άτοπο αποτέλεσμα.

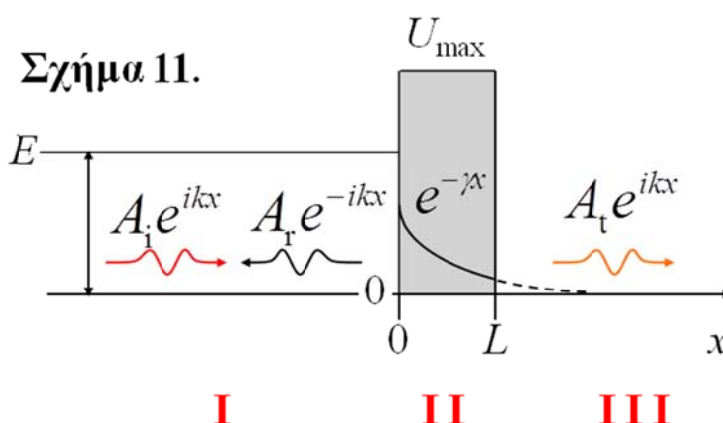
Οι συντελεστές ανάκλασης και διέλευσης ως συνάρτησης της ενέργειας, τόσο για $E > U_{\max}$ όσο και για $E < U_{\max}$, φαίνονται στο Σχ. 10. Παρατηρήστε ότι για $E > U_{\max}$ η πιθανότητα ανάκλασης είναι τόσο μεγαλύτερη όσο η ενέργεια του σωματιδίου E πλησιάζει (εκ των άνω) το ύψος του σκαλοπατιού $U_{\max}$. Κλείνουμε την αναφορά μας στο θέμα με μία σημαντική παρατήρηση. Όπως είπαμε και παραπάνω, το σωματίδιο είτε θα ανακλαστεί είτε θα διέλθει. Συντελεστές, π.χ. $R=0.1$ και $T=0.9$ σημαίνουν ότι εάν επαναλάβουμε το ίδιο πείραμα, ας πούμε, 100 φορές τότε 10 σωματίδια θα ανακλαστούν και 90 θα διέλθουν. Κάθε σωματίδιο όμως θα ανιχνεύεται κάθε φορά ως ξεχωριστή αδιαίρετη μονάδα.



Σχήμα 10.

8. Διαπερατότητα σε ένα Φράγμα Δυναμικής Ενέργειας - Το Φαινόμενο Σήραγγας

Εδώ θα ασχοληθούμε με το φράγμα δυναμικής ενέργειας που φαίνεται στο Σχ. 11. Η δυναμική ενέργεια είναι μηδενική για $x < 0$, έχει μία σταθερή τιμή $U_{\max} > 0$ στο διάστημα $0 \leq x \leq L$ και μετά είναι πάλι μηδενική για $x > L$. Εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση $E < U_{\max}$ και υποθέτουμε ξανά ότι σωματίδιο μάζας m έρχεται από τα αριστερά προς το φράγμα. Εφόσον τώρα η



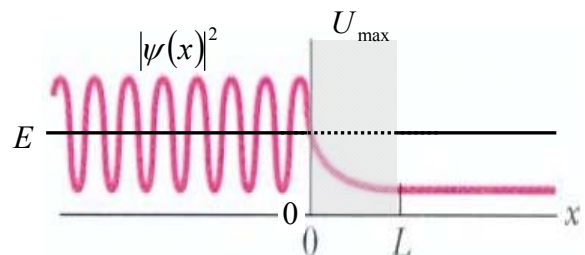
Σχήμα 11.

δυναμική ενέργεια είναι ασυνεχής σε δύο σημεία ($x=0$ και $x=L$) θα πρέπει να λύσουμε της εξίσωση Schrödinger ξεχωριστά για κάθε μία από τις περιοχές I, II και III του Σχ. 11. Στην περιοχή I, η ψ_I γράφεται στη μορφή (36) και αποτελείται από δύο κύματα με πλάτη A_i (για το προσπίπτον) και A_r (για το ανακλώμενο). Στην περιοχή II, η ψ_{II} γράφεται στη μορφή (38) και αποτελείται από έναν όρο που μειώνεται εκθετικά ($e^{-\gamma x}$)

και ένα όρο που αυξάνεται εκθετικά ($e^{\gamma x}$) καθώς το $x \geq 0$ αυξάνει και μέχρι το σημείο $x=L$. Στην αυστηρή λύση του προβλήματος λαμβάνονται υπ' όψη και οι δύο όροι. Τέλος, στην περιοχή III, η ψ_{II} γράφεται στη μορφή της (55) όπου, χωρίς προσεγγίσεις, υποθέτουμε ότι αποτελείται από ένα κύμα πλάτους A_t που οδεύει προς τα δεξιά. Η επιλογή αυτή δικαιολογείται ξανά από το γεγονός ότι, εφόσον έχουμε υποθέσει ότι το σωματίδιο έρχεται από τα αριστερά, στην περιοχή III δεν μπορεί να υπάρχει κύμα που οδεύει προς τα αριστερά. Για τη λύση του προβλήματος θα πρέπει να εφαρμόσουμε τις συνθήκες ομαλότητας της κυματοσυνάρτησης και της πρώτης της παραγώγου, τόσο στο σημείο $x=0$ (σχέσεις (41α,β)) όσο και τις αντίστοιχες στο σημείο $x=L$. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε το συντελεστή διέλευσης T . Για τις ανάγκες του παρόντος μαθήματος θα ασχοληθούμε μόνο με την προσεγγιστική λύση του προβλήματος όπου υποθέτουμε ότι το φράγμα στην περιοχή II είναι ψηλό (μεγάλο $U_{\max}$) και ευρύ (μεγάλο L) και κρατάμε στη ψ_{II} μόνο τον όρο $e^{-\gamma x}$ που μειώνεται εκθετικά. Τότε, ο συντελεστής διέλευσης γράφεται ως,

$$T \equiv \left| \frac{A_t}{A_i} \right|^2 \sim e^{-2\gamma L} = e^{-2 \frac{\sqrt{2m(U_{\max}-E)}}{\hbar} L} \quad (59)$$

και αποτυπώνει την τεράστια, εκθετική, εξάρτηση του φαινομένου σήραγγας από τη μάζα του σωματιδίου, το μήκος του φράγματος και την ενεργειακή διαφορά $U_{\max}-E$. Και τα τρία αυτά μεγέθη θα πρέπει να είναι μικρά ώστε ο συντελεστής T να μην είναι αμελητέος. Το μέτρο αυτής της «μικρότητας» (μικρόκοσμος) είναι η παγκόσμια σταθερά του Planck $\hbar$. Υπενθυμίζουμε ότι, εφόσον $E < U_{\max}$, κλασικά προβλέπεται ότι το σωματίδιο θα ανακλαστεί οπωσδήποτε προς τα πίσω στο σημείο $x=0$. Κβαντικά όμως προβλέπεται, όπως είδαμε, μια εκθετικά μειούμενη πιθανότητα διείσδυσης στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή. Εάν όμως αυτή η πυκνότητα πιθανότητας δεν έχει προλάβει να «σβήσει» τελείως στο σημείο $x=L$, η πιθανότητα στην έξοδο του φράγματος έχει μη-μηδενική τιμή (Σχ. 11 και 12). Αυτήν την τιμή θα συνεχίσει να την έχει και στα δεξιά του φράγματος. Συνεπώς, θα υπάρχει μη-μηδενική πιθανότητα να βρεθεί εκεί το σωματίδιο έχοντας διαπεράσει το φράγμα. Στο Σχ. 12 φαίνεται σχηματικά η πλήρης πυκνότητα πιθανότητας $|\psi(x)|^2$. Πριν από το φράγμα ($x < L$) η $|\psi(x)|^2$ έχει τη μορφή στασίμου κύματος που δημιουργείται από την υπέρθεση του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος de Broglie. Εντός του φράγματος, πράγματι η $|\psi(x)|^2$ μειώνεται εκθετικά και μετά το φράγμα ($x > L$) έχει σταθερή τιμή ίση με $|A_t|^2$, εφόσον στην περιοχή αυτή υπάρχει μόνο ένα κύμα που οδεύει προς τα δεξιά και συνεπώς δεν εμφανίζονται φαινόμενα υπέρθεσης (συμβολής).

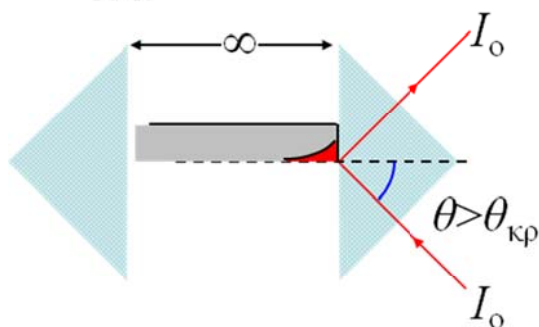


Σχήμα 12.

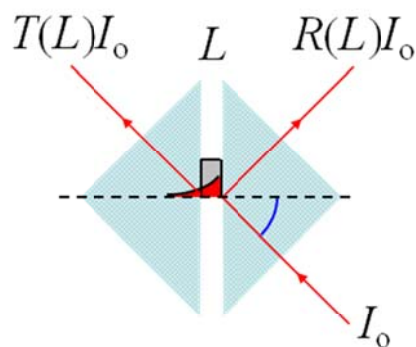
παγορευμένη περιοχή. Εάν όμως αυτή η πυκνότητα πιθανότητας δεν έχει προλάβει να «σβήσει» τελείως στο σημείο $x=L$, η πιθανότητα στην έξοδο του φράγματος έχει μη-μηδενική τιμή (Σχ. 11 και 12). Αυτήν την τιμή θα συνεχίσει να την έχει και στα δεξιά του φράγματος. Συνεπώς, θα υπάρχει μη-μηδενική πιθανότητα να βρεθεί εκεί το σωματίδιο έχοντας διαπεράσει το φράγμα. Στο Σχ. 12 φαίνεται σχηματικά η πλήρης πυκνότητα πιθανότητας $|\psi(x)|^2$. Πριν από το φράγμα ($x < L$) η $|\psi(x)|^2$ έχει τη μορφή στασίμου κύματος που δημιουργείται από την υπέρθεση του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος de Broglie. Εντός του φράγματος, πράγματι η $|\psi(x)|^2$ μειώνεται εκθετικά και μετά το φράγμα ($x > L$) έχει σταθερή τιμή ίση με $|A_t|^2$, εφόσον στην περιοχή αυτή υπάρχει μόνο ένα κύμα που οδεύει προς τα δεξιά και συνεπώς δεν εμφανίζονται φαινόμενα υπέρθεσης (συμβολής).

Το φαινόμενο σήραγγας όσον αφορά τα σωματίδια είναι ένα καθαρά κβαντικό φαινόμενο. Κλασικό ανάλογο υπάρχει πάλι μόνο για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα και όχι τα σωματίδια, και είναι γνωστό με το όνομα «ανικανοποίητη ολική εσωτερική ανάκλαση». Στο Σχ. 13(α) έχουμε μια φωτεινή δέσμη που προσπίπτει σε ένα πρίσμα από γυαλί. Η γωνία πρόσπτωσης στη μεσεπιφάνεια γυαλιού-αέρα στην υποτείνουσα του πρίσματος είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη και όλη η φωτεινή ισχύς ανακλάται. Όπως όμως αναφέραμε και προηγουμένως, υπάρχει ένα εκθετικά φθίνων κύμα που διεισδύει στον αέρα αλλά δεν διαδίδεται.

Σχήμα 13.



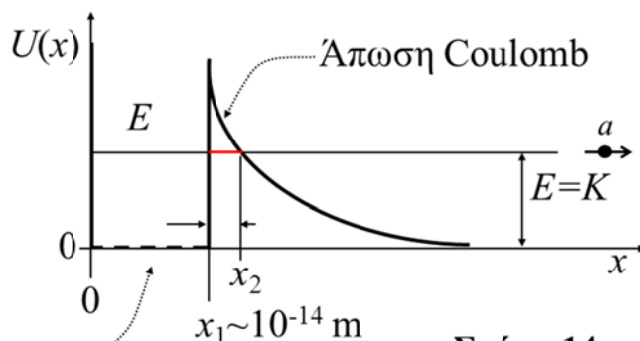
(α) Ολική Εσωτερική Ανάκλαση
Το φως διεισδύει αλλά **δεν** διαδίδεται...



(β) **Ανικανοποίητη** Ολική Εσωτερική Ανάκλαση
Το φως διεισδύει **και** διαδίδεται...

Υποθέστε τώρα ότι τοποθετούμε ένα δεύτερο πρίσμα κοντά στο πρώτο. Το διάκενο αέρα μεταξύ των δύο πρισμάτων αποτελεί το «φράγμα» στην περίπτωση αυτή. Όταν η απόσταση των δύο πρισμάτων είναι πολύ μεγαλύτερη από το μήκος διείσδυσης του κύματος στο πρώτο πρίσμα (Σχ. 13(α)), πράγματι όλη η φωτεινή ισχύς ανακλάται (ολική εσωτερική ανάκλαση). Όταν όμως η απόσταση των πρισμάτων είναι μικρότερη από το μήκος διείσδυσης (Σχ. 13(β)) ένα μέρος της φωτεινής ισχύος διαρρέει εντός του δεύτερου πρίσματος (ανικανοποίητη ολική εσωτερική ανάκλαση). Το ποσοστό ανάκλασης και διέλευσης εξαρτάται έντονα (εκθετικά) από την απόσταση των δύο πρισμάτων. Η συσκευή αυτή χρησιμοποιείται στην Οπτική, μεταξύ άλλων, για την κατασκευή διαχωριστών δέσμης μεταβλητών συντελεστών ανάκλασης και διέλευσης.

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι το κβαντικό φαινόμενο σήραγγας αντανakλά και πάλι την κυματική φύση των σωματιδίων του μικρόκοσμου όπου είναι ιδιαίτερα σύννηθες. Σ' αυτό βασίζεται, μεταξύ άλλων φαινομένων, ο σχηματισμός του δεσμού Υδρογόνου στα μόρια και η πυρηνική διάσπαση μέσω της εκπομπής σωματιδίων α (πυρήνες He). Ειδικά στο τελευταίο φαινόμενο φαίνεται ξεκάθαρα η εκθετική εξάρτηση του συντελεστή διέλευσης T από την ενεργειακή διαφορά $U_{\max} - E$. Η εξάρτηση αυτή έχει ως αποτέλεσμα ότι ενώ κινητική ενέργεια των εκπεμπόμενων σωματιδίων α κατά τη πυρηνική διάσπαση μεταβάλλεται σε μια στενή περιοχή των μερικών MeV, οι χρόνοι ημιζωής των πυρήνων εκτείνονται από 10^{-7} sec (μεγάλος T) έως και 10^{10} yrs (μικρός T). Σχηματικό διάγραμμα της δυναμικής ενέργειας την οποία «βλέπει» ένα σωματίδιο α στην γειτονιά ενός πυρήνα φαίνεται στο Σχ. 14. Σε μικρές αποστάσεις η δυναμική ενέργεια αποτελείται από ένα πηγάδι τυπικών πυρηνικών διαστάσεων ($\sim 10^{-14}$ m = 10 fm) που οφείλεται στην πυρηνική έλξη μικρής εμβέλειας. Σε μεγάλες αποστάσεις επικρατεί η άπωση Coulomb μεταξύ του σωματιδίου α και των υπολοίπων πρωτονίων και η οποία είναι πολύ μεγαλύτερης εμβέλειας. Παρατηρούμε ότι εδώ το εύρος του φράγματος δεν είναι σταθερό αλλά εξαρτάται



Σχήμα 14.

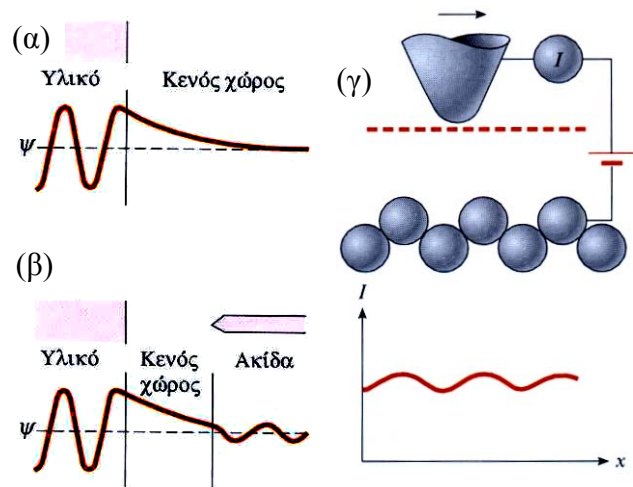
Πυρηνική έλξη

από τη θέση x . Αυτό δεν αλλάζει πολλά στη φυσική του προβλήματος. Η μόνη διαφορά είναι ότι ο όρος γL στην (59) πρέπει να αντικατασταθεί από τη «μέση του τιμή», δηλαδή πρέπει να κάνουμε την αντικατάσταση,

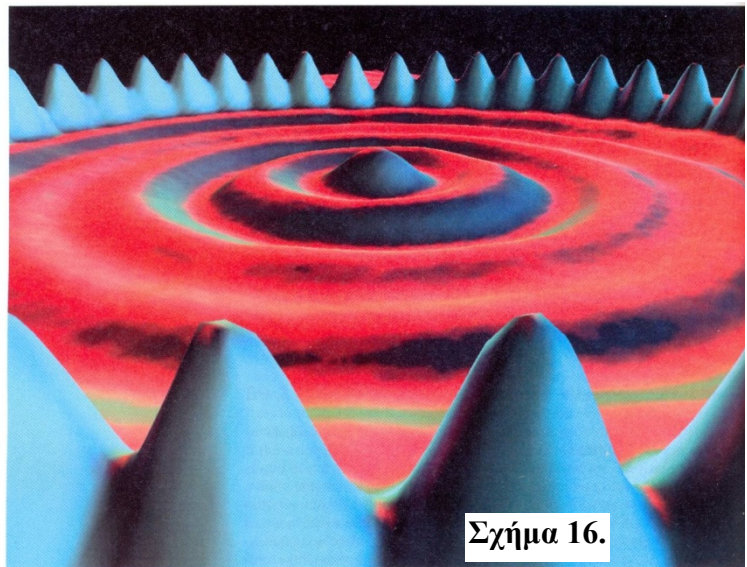
$$\frac{\sqrt{2m(U_{\max} - E)}}{\hbar} L \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{2m(U(x) - E)}}{\hbar} dx . \quad (60)$$

Τέλος, το φαινόμενο έχει και πολλές πρακτικές εφαρμογές. Μία τέτοια εφαρμογή είναι και το **μικροσκόπιο σήραγγας** (Binnig και Rohrer, Βραβείο Nobel 1986), η αρχή λειτουργίας του οποίου φαίνεται στο Σχ. 15. Τα ηλεκτρόνια ενός υλικού είναι εγκλωβισμένα σε αυτό (πηγάδι δυναμικής ενέργειας βάθους ίσου με το έργο εξόδου). Πλησιάζοντας μια μεταλλική ακίδα στην επιφάνεια του υλικού, ο χώρος μεταξύ αυτού και της ακίδας δημιουργεί ένα φράγμα δυναμικής ενέργειας (επιφάνεια-κενό μήκους L -επιφάνεια). Η πιθανότητα να διαπεράσουν τα ηλεκτρόνια το φράγμα (και συνε-

πώς και το ανιχνευόμενο ρεύμα) εξαρτάται εκθετικά από την απόσταση ακίδας-επιφάνειας. Σαρώνοντας την ακίδα κατά μήκος της επιφάνειας, η μεταβολή του ρεύματος αποτυπώνει και “χαρτογραφεί” την επιφάνεια αυτή. Με την παραπάνω τεχνική καταγράφηκε η εικόνα του Σχ. 16, όπου βλέπουμε 48 άτομα σιδήρου σε κυκλικό σχηματισμό επάνω σε μια επιφάνεια χαλκού. Να σημειωθεί ότι κάθε άτομο μεταφέρθηκε στη θέση του από την ίδια ακίδα που, πέραν του κύριου ρόλου της που είναι η «χαρτογράφηση», ασκεί, επιπλέον, μια μικρή δύναμη στα άτομα. Οι εσωτερικοί κυματισμοί της εικόνας αντιστοιχούν σε κύματα de Broglie ηλεκτρονίων που είναι παγιδευμένα στο λεγόμενο «κβαντικό μαντρί».



Σχήμα 15.

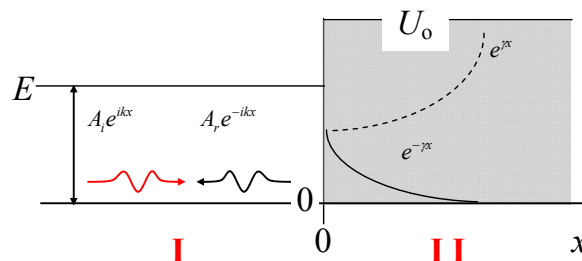


Σχήμα 16.

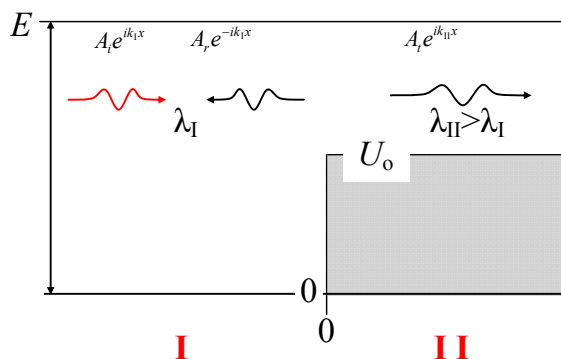
Κ4. Ασκήσεις/Προβλήματα

Εξίσωση Schrödinger – Κυματοσυναρτήσεις – Πιθανότητες – – Μέσες τιμές – Συντελεστές Διέλευσης και Ανάκλασης.

1. Αποδείξτε ότι οι κυματοσυναρτήσεις $\psi_I(x) = A_i e^{ikx} + A_r e^{-ikx}$ και $\psi_{II}(x) = B e^{-\gamma x}$ με $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ και $\gamma = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$ αποτελούν πράγματι λύσεις της εξίσωσης Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + U(x) \psi(x) = E \psi(x)$ στις περιοχές I και II αντίστοιχα του διπλανού σχήματος. [Υπόδειξη: Εισάγετε τις κυματοσυναρτήσεις στην εξίσωση και δείξτε ότι τα δύο μέλη της είναι ίσα.]



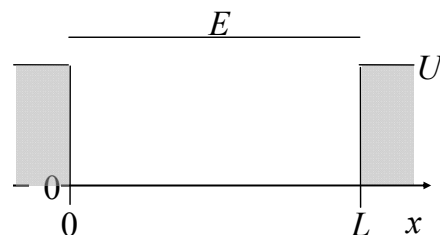
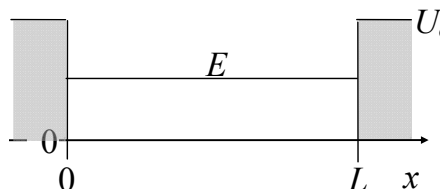
2. Αποδείξτε ότι η κυματοσυνάρτηση $\psi_{II}(x) = A_t e^{-ik_{II}x}$ με $k_{II} = \sqrt{2m(E - U_0)}/\hbar$ αποτελεί πράγματι λύση της εξίσωσης Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + U(x) \psi(x) = E \psi(x)$ στην περιοχή II του διπλανού σχήματος. Δεδομένου ότι $k=2\pi/\lambda=p/\hbar$, βρείτε και συγκρίνετε τα μήκη κύματος De Broglie στις περιοχές I και II.



3. Σχεδιάστε ποιοτικά τις κυματοσυναρτήσεις και πιθανότητες να βρούμε ένα σωματίδιο εγκλωβισμένο σε πηγάδι δυναμικής ενέργειας απείρου ύψους στο διάστημα μεταξύ x και $x+dx$ για τις καταστάσεις $n=1-5$. Υποθέστε ότι οι κυματοσυναρτήσεις είναι κανονικοποιημένες έτσι ώστε να είναι πραγματικές.

4. (α) Θεωρήστε το πηγάδι δυναμικής ενέργειας ύψους U_0 και μήκους L του διπλανού σχήματος. Υποθέστε ότι $E < U_0$ οπότε τα επιτρεπτά ενεργειακά επίπεδα του σωματιδίου θα είναι διάκριτα (κβαντωμένα). Υποθέστε επίσης ότι τα επίπεδα αυτά είναι τουλάχιστον πέντε τον αριθμό και σχεδιάστε ποιοτικά (από το $-\infty$ έως το $+\infty$) τις κυματοσυναρτήσεις και πιθανότητες να βρούμε το σωματίδιο στο διάστημα μεταξύ x και $x+dx$ για κάθε επίπεδο. Συζητήστε τις ομοιότητες και διαφορές με τις αντίστοιχες πρώτες πέντε κυματοσυναρτήσεις και πιθανότητες του πηγαδιού απείρου ύψους αλλά ίδιου μήκους. Συγκρίνετε ποιοτικά τις θέσεις των διάκριτων ενεργειακών επιπέδων των δύο πηγαδιών.

(β) Θεωρήστε τώρα ότι $E > U_0$ και ότι σωματίδιο εισέρχεται από το $-\infty$. Συζητήστε την αναμενόμενη μορφή των κυματοσυναρτήσεων στις διάφορες περιοχές δυναμικής ενέργειας και το είδος του ενεργειακού φάσματος.



5. Η πιθανότητα εύρεσης ενός σωματιδίου για κάποια μορφή δυναμικής ενέργειας στο διάστημα μεταξύ x και $x+dx$ γράφεται ως $P_n(x)dx = C^2 \exp(-2a|x|)dx$. Βρείτε τη σταθερά C ώστε η συνολική πιθανότητα (στο διάστημα $-\infty < x < +\infty$) να είναι ίση με τη μονάδα.

6. Για τη θεμελιώδη κατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή, η πιθανότητα εύρεσης του σωματιδίου στο διάστημα μεταξύ x και $x+dx$ γράφεται ως $P_n(x)dx = C \exp(-m\omega x^2 / \hbar) dx$. Βρείτε τη σταθερά C

ώστε η συνολική πιθανότητα να είναι ίση με τη μονάδα. Δίδεται ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$.

7. Οι κανονικοποιημένες πιθανότητες να βρούμε ένα σωματίδιο εγκλωβισμένο σε πηγάδι δυναμικής ενέργειας απείρου ύψους στο διάστημα μεταξύ x και $x+dx$ γράφονται:

$$P_n(x)dx = \frac{2}{L} \sin^2\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx$$

όπου L το μήκος του πηγαδιού και n ο κβαντικός αριθμός που χαρακτηρίζει το ενεργειακό επίπεδο του σωματιδίου. Ποια η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στο διάστημα $[a,b]$ με $0 \leq a < b \leq L$;

Εφαρμογές: (i) $n=1$, $a=L/3$, $b=2L/3$, (ii) $n=2$, $a=0$, $b=2L/3$, (iii) $a=0$, $b=L/2$.

8. Η κυματοσυνάρτηση μιας κατάστασης του πηγαδιού δυναμικής ενέργειας απείρου ύψους έχει τέσσερα σημεία μηδενισμού στο διάστημα $0 < x < L$ (τα σημεία $x=0$ και $x=L$ δεν περιέχονται στο διάστημα). Ποιος ο κβαντικός αριθμός n ;

9. Τι περιμένουμε να συμβεί στα ενεργειακά επίπεδα και τις κυματοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε σωματίδιο εντός ενός πηγαδιού δυναμικής ενέργειας απείρου ύψους εάν:

(α) εντός του πηγαδιού η δυναμική ενέργεια έχει τη σταθερή τιμή U_0 ;

(β) η αρχή του πηγαδιού είναι μετατοπισμένη κατά σταθερή απόσταση x_0 (ενώ $U_0=0$);

10. Χρησιμοποιώντας την Αρχή της Απροσδιοριστίας αποδείξτε ότι ένα σωματίδιο εγκλωβισμένο σε πηγάδι δυναμικής ενέργειας απείρου ύψους δεν μπορεί να έχει μηδενική ενέργεια. Επιπλέον, εκτιμήστε την ελάχιστη ενέργεια που μπορεί να έχει και συγκρίνετέ την με την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 2mL^2$.

11. Οι πιθανότητες να βρούμε ένα σωματίδιο εγκλωβισμένο σε πηγάδι δυναμικής ενέργειας απείρου ύψους στο διάστημα μεταξύ x και $x+dx$ γράφονται:

$$P_n(x)dx = \frac{2}{L} \sin^2\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx$$

όπου L το μήκος του πηγαδιού και n ο κβαντικός αριθμός που χαρακτηρίζει το ενεργειακό επίπεδο του σωματιδίου. Βρείτε τις μέσες τιμές $\langle x \rangle_n$ και $\langle x^2 \rangle_n$, και από αυτές την αβεβαιότητα

$$\Delta x_n = \sqrt{\langle x^2 \rangle_n - (\langle x \rangle_n)^2}$$

Δίδεται ότι: $\int_0^L x \cos\left(2n\pi \frac{x}{L}\right) dx = 0$ και $\int_0^L x^2 \cos\left(2n\pi \frac{x}{L}\right) dx = \frac{L^3}{2\pi^2 n^2}$.

Εφαρμογές: $n=1, 2, 10, 100$.

12. Η πιθανότητα να βρούμε ένα σωματίδιο εγκλωβισμένο σε πηγάδι δυναμικής ενέργειας απείρου ύψους στο διάστημα μεταξύ x και $x+dx$

$$P_n(x)dx = \frac{2}{L} \sin^2\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx$$

μηδενίζεται στα σημεία $x_1=0.3L$ και $x_2=0.4L$ αλλά δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο μεταξύ των x_1 και x_2 . Ποιος ο κβαντικός αριθμός n της ενεργειακού επιπέδου του σωματιδίου;

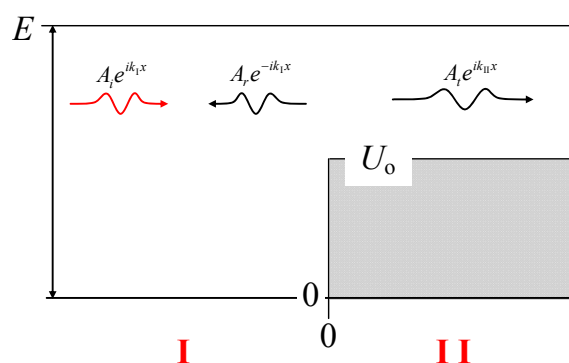
13. Η θεμελιώδης κατάσταση του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή (δυναμική ενέργεια $U(x)=m\omega^2 x^2/2$) αντιστοιχεί σε μηχανική ενέργεια $E_{n=0}=\hbar\omega/2$ και πιθανότητα εύρεσης του σωματι-

δίου στο διάστημα μεταξύ x και $x+dx$, $|\psi_{n=0}(x)|^2 dx = C \exp(-m\alpha x^2 / \hbar) dx$. Χρησιμοποιώντας την Αρχή της Απροσδιοριστίας εκτιμήστε την αβεβαιότητα που θα προκαλούσε στην κινητική ενέργεια η προσπάθεια εντοπισμού του σωματιδίου σε μια περιοχή ίση με το βάθος διείσδυσης στην κλασσικά απαγορευμένη περιοχή. Συγκρίνετε την αβεβαιότητα κινητικής ενέργειας που βρήκατε με την ενέργεια $E_{n=0}$ και συζητήστε το αποτέλεσμα.

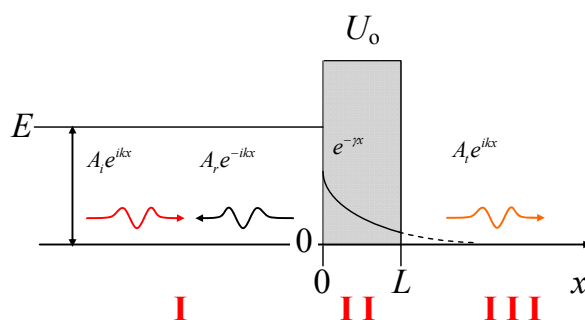
Υπόδειξη: Το μήκος διείσδυσης για τη θεμελιώδη κατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή ορίζεται ως η απόσπαση μεταξύ του σημείου $x_1=A_0$ (όπου A_0 είναι το πλάτος της ταλάντωσης ενός κλασσικού αρμονικού ταλαντωτή με ενέργεια $E_{n=0}=U(A_0)$) και του σημείου $x=x_2$ τέτοιου ώστε $|\psi(x_2)|^2 = C \exp(-2)$.

14. Αρχή της Αντιστοιχίας: Το φάσμα του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή γράφεται ως $E_n=(n+1/2)\hbar\omega$. Ποια η συμπεριφορά της σχετικής ενεργειακής διαφοράς $\Delta E_{n+1,n}/E_n$ για $n \gg 1$; Μπορούμε να πούμε ότι για μεγάλους κβαντικούς αριθμούς τα ενεργειακά επίπεδα διαμορφώνουν ένα συνεχές πεδίο επιτρεπτών ενεργειακών τιμών όπως προβλέπεται από τη Κλασσική Φυσική;

15. Σωματίο μάζας m και ενέργειας E κατευθύνεται προς ορθογώνιο σκαλοπάτι δυναμικής ενέργειας ύψους U_0 (όπως στο διπλανό σχήμα). Βρείτε τους συντελεστές ανάκλασης R και διέλευσης T όταν $U_0=3E/4$. Δίδεται ότι $R = (k_1 - k_2)^2 / (k_1 + k_2)^2$.



16. Ένα πρωτόνιο κινητικής ενέργειας 3 MeV πλησιάζει σε ορθογώνιο φράγμα δυναμικού πάχους 10 fm και ύψους 10 MeV. Ποιος ο συντελεστής διέλευσης του φράγματος T , μέσω του φαινομένου σήραγγας; Ποια θα είναι η κινητική του ενέργεια εάν διέλθει; Ποια η κινητική του ενέργεια εάν ανακλαστεί; Δίδεται ότι $m_p=1.673 \times 10^{-27}$ kg και $T \sim \exp(-2L\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar)$



17. Θεωρήστε ορθογώνιο φράγμα δυναμικής ενέργειας ύψους 6 eV και πάχους 0.7 nm. Ποια θα πρέπει να είναι η κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου που κατευθύνεται προς το φράγμα ώστε ο συντελεστής διέλευσής του να είναι ίσος με 10^{-3} ; Δίδεται ότι $m_e=9.11 \times 10^{-31}$ kg.

18. Σωματίο μάζας m και ενέργειας E κατευθύνεται προς ορθογώνιο φράγμα δυναμικής ενέργειας ύψους U_0 και πάχους L . Γνωρίζουμε ότι για $E=5U_0/6$ ο συντελεστής διέλευσης είναι ίσος με $T=45 \times 10^{-6}$. Υπολογίστε τη ποσοστιαία σχετική μεταβολή $100 \times \Delta T/T = 100 \times (T-T')/T$ του συντελεστή διέλευσης εάν (α) το πάχος του φράγματος, (β) η μάζα του σωματιδίου και (γ) το ύψος του φράγματος αυξηθεί κατά 1%. [Κάθε φορά μεταβάλλεται ένα μέγεθος ενώ τα υπόλοιπα παραμένουν αμετάβλητα].

19. (α) Δέσμη ηλεκτρονίων ενέργειας 5 eV, προσπίπτει σε ορθογώνιο φράγμα δυναμικού πάχους 0.7 nm και ύψους 6 eV. Ο ρυθμός με τον οποίο τα ηλεκτρόνια προσπίπτουν στο φράγμα είναι ισόδυναμος με ένα ηλεκτρικό ρεύμα $I=1000$ Ampere. Πόσο θα πρέπει να περιμένουμε, κατά μέσο όρο, ώστε ένα ηλεκτρόνιο να διαπεράσει το φράγμα;

(β) Εκτιμήστε τον παραπάνω χρόνο στη περίπτωση όπου η δέσμη ηλεκτρονίων αντικατασταθεί από δέσμη πρωτονίων.

Μερικά θέματα από τις προηγούμενες εξεταστικές περιόδους

Θέμα 3°:

(α) Σε πείραμα σκέδασης Compton χρησιμοποιούνται ακτίνες X μήκους κύματος $\lambda_0 = 242 \text{ pm}$. Σε ποια γωνία θ πρέπει να παρατηρήσουμε τη σκεδαζόμενη ακτινοβολία ώστε η σχετική μετατόπιση του μήκους κύματος $\Delta\lambda/\lambda_0$ να είναι 1%; [5 μονάδες]

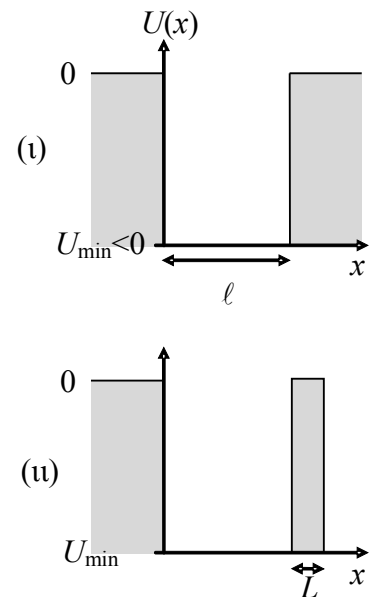
(β) Οι ίδιες ακτίνες X χρησιμοποιούνται και σε πείραμα περίθλασης Bragg. Βρέθηκε ότι ο σχηματισμός περίθλασης που παράγουν είναι ίδιος με αυτόν που παράγεται από ηλεκτρόνια κινητικής ενέργειας K . Βρείτε την K (εκφρασμένη σε eV). [15 μονάδες]

Θέμα 4°:

(α) Σε πείραμα μελέτης του φωτοηλεκτρικού φαινομένου βρέθηκε ότι φωτίζοντας ένα φύλλο κάποιου μετάλλου με υπεριώδη ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda = 275.9 \text{ nm}$, ηλεκτρόνια εξέρχονται του μετάλλου με μέγιστη κινητική ενέργεια $K_{\max} = 0.5 \text{ eV}$. Ποιο είναι το έργο εξόδου ϕ του μετάλλου; [5 μονάδες]

(β) Για το παραπάνω μεταλλικό φύλλο, μπορούμε να θεωρήσουμε προσεγγιστικά ότι τα ηλεκτρόνια είναι εγκλωβισμένα σε ένα πηγάδι δυναμικής ενέργειας πεπερασμένου βάθους και μήκους, όπως στο σχήμα (i). Γνωρίζοντας ότι τα ηλεκτρόνια έχουν την ελάχιστη δυνατή ενέργεια, κάποιος μας λέει ότι ισχύει $\phi = |U_{\min}|$. Τον πιστεύετε ή όχι και γιατί; Εξηγήστε λεπτομερώς το συλλογισμό σας. [15 μονάδες]

(γ) Μια επιφάνεια του ίδιου μετάλλου πλησιάζει το πρώτο φύλλο σε απόσταση $L = 1 \text{ nm}$. Το διάστημα μεταξύ των δύο επιφανειών λειτουργεί ως φράγμα δυναμικής ενέργειας (σχήμα (ii)). Εκτιμήστε τον συντελεστή διέλευσης των ηλεκτρονίων στην δεύτερη αυτή επιφάνεια. [10 μονάδες]



Δίδονται: $\hbar = 1.054 \times 10^{-34} \text{ Js}$, $\hbar = h/2\pi$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $\lambda_c = h/(m_e c)$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$u(f, T) df = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{e^{hf/kT} - 1} df$$

$$\Delta n \propto \frac{Z^2}{K_a^2 \sin^4(\phi/2)}$$

$$K_{\max} = hf - \phi \quad p = h/\lambda$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

$$T = \frac{4k_1 k_{II}}{(k_1 + k_{II})^2}$$

$$T \sim \exp \left[- \frac{2L \sqrt{2m(U_{\max} - E)}}{\hbar} \right]$$

$$E_n = - \frac{Ryd}{n^2}$$

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos \theta)$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Θέμα 3^ο: Σε πείραμα μελέτης του φωτοηλεκτρικού φαινομένου, επιφάνεια του μετάλλου Li φωτίζεται με ορατή ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda=500.5 \text{ nm}$.

(α) Δείξτε ότι $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

[5 μονάδες]

(β) Εάν η τάση αποκοπής είναι $|V_s|=0.18 \text{ Volt}$, ποιο το έργο εξαγωγής ϕ του Li;

[10 μονάδες]

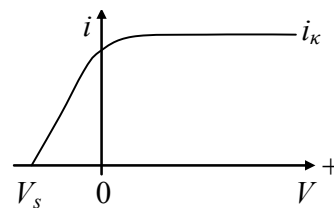
(γ) Η επιφάνεια του μετάλλου έχει εμβαδό $S=2 \text{ cm}^2$ και η ένταση της φωτεινής πηγής είναι ίση με $I=5 \text{ mW/cm}^2$. Εκφράστε την ισχύ της προσπίπτουσας ακτινοβολίας ως αριθμό φωτονίων ανά μονάδα χρόνου.

[10 μονάδες]

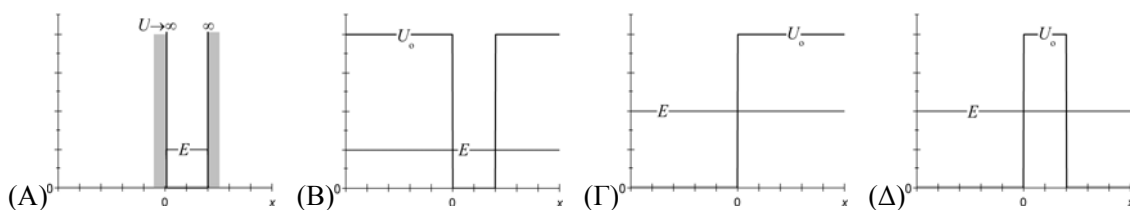
(δ) Έστω ότι κάθε προσπίπτον φωτόνιο εξάγει πάντα ένα ηλεκτρόνιο. Υπολογίστε το ρεύμα κόρου i_k , εκφρασμένο σε Amperes.

[5 μονάδες]

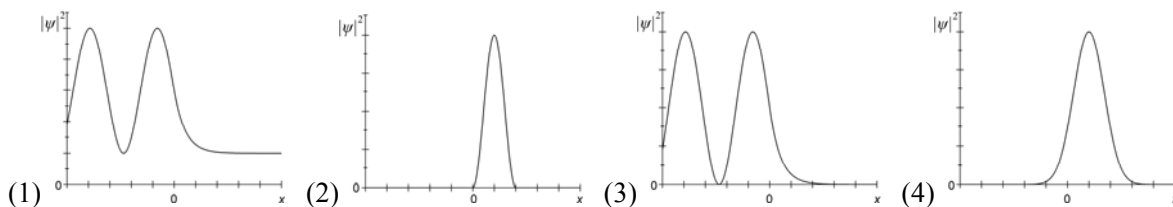
Δίδεται ότι: $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ Cb}$, $h=6.62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, $c=3 \times 10^8 \text{ m/s}$, $\hbar c=197.3 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$, $c=3 \times 10^8 \text{ m/s}$.



Θέμα 4^ο: Τα παρακάτω διαγράμματα (Α-Δ) δείχνουν τέσσερις μορφές δυναμικής ενέργειας $U(x)$ ενός σωματιδίου ολικής ενέργειας E .



Τα διαγράμματα (1-4) που ακολουθούν παριστάνουν τετράγωνα κυματοσυναρτήσεων που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης Schrödinger για τις δυναμικές ενέργειες (Α-Δ).



Σε όλα τα διαγράμματα η κλίμακα του άξονα x είναι η ίδια. Αντιστοιχίστε **αιτιολογημένα** τα διαγράμματα (Α-Δ) με τα (1-4).

(4×7.5 μονάδες)